

7 Analytická geometrie v rovině

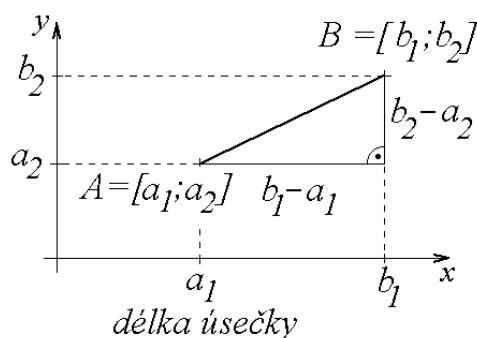
Myslím, tedy jsem.

(René Descartes)

7.1 Úsečka

V kapitole 5.1 jsme zavedli pojem souřadnice v rovině pro potřeby konstrukce grafů funkcí. Pomocí souřadnic lze ovšem popisovat i geometrické útvary. Tuto metodu použil poprvé francouzský matematik a filozof René Descartes, který je považován za zakladatele analytické

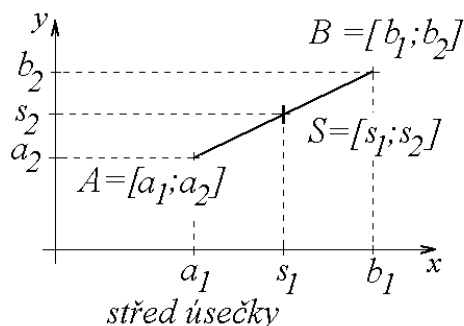
geometrie. Tato matematická disciplína popisuje geometrické útvary pomocí aparátu aritmetiky a algebry právě prostřednictvím souřadnic.



Délka úsečky AB (vzdálenost bodů A, B): Je-li $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, pak

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Střed úsečky AB, kde $A = [a_1; a_2]$; $B = [b_1; b_2]$ je bod $S = [s_1; s_2] \in AB$ takový, že $|SA| = |SB|$:



$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}; s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

Příklad 1.: Jsou dány body $A = [-4; -2]$, $B = [-3; 5]$. Určete bod C tak, aby ležel na ose y a $\triangle ABC$ byl rovnoramenný trojúhelník se základnou AB .

Řešení: Hledané souřadnice označme $C = [c_1; c_2]$. Má-li být $C \in y$, musí být $c_1 = 0$, tedy $C = [0; c_2]$. Má-li být dále $|AC| = |BC|$, dostáváme:

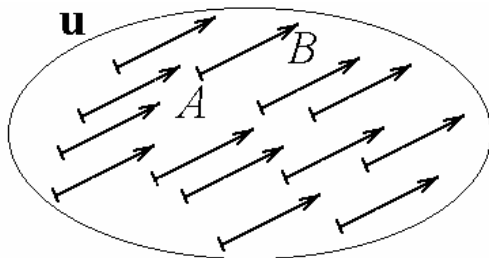
$$\begin{aligned} \sqrt{(-4)^2 + (c_2 + 2)^2} &= \sqrt{3^2 + (c_2 - 5)^2} / ()^2 \\ 16 + c_2^2 + 4c_2 + 4 &= 9 + c_2^2 - 10c_2 + 25 \\ 14c_2 &= 14 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že jsme skutečně našli kořen rovnice, hledaný bod má tedy souřadnice $C = [0; 1]$.

7.2 Vektory v rovině

V kpt. 6.8 jsme zavedli pojem orientované úsečky, na který nyní navážeme.

Vektor: je množina všech shodných souhlasně orientovaných úseček. Označujeme ho buď tučně $\mathbf{u}$ nebo (spíše v ručně psaném textu) šipkou $\vec{u}$.



vektor a jeho umístění

množiny). Připouštíme i tzv. nulový vektor jako množinu všech úseček „nulové“ délky, tj. $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$.

Velikost (délka) vektoru: velikostí (délkou) vektoru $\mathbf{u}$ rozumíme velikost (délku) jeho libovolného reprezentanta. Značíme $|\mathbf{u}|$. Vektor, jehož velikost je rovna jedné, nazýváme jednotkový vektor.

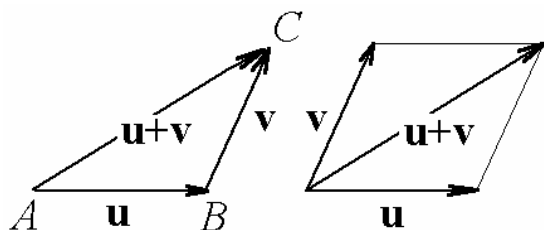
Součet bodu a vektoru: Umístíme vektor $\mathbf{u}$ do bodu A a koncový bod tohoto umístění označme B . Bod B nazýváme součtem bodu A a vektoru $\mathbf{u}$, značíme $B = A + \mathbf{u}$. Vektor $\mathbf{u}$ nazýváme rozdílem bodů $B; A$ (v tomto pořadí), značíme $\mathbf{u} = B - A$.

Násobení vektoru reálným číslem (skalárem): Necht' $k \in \mathbb{R}$ je libovolné reálné číslo, $\mathbf{u}$ libovolný vektor. Součinem čísla k a vektoru $\mathbf{u}$ rozumíme vektor $k \cdot \mathbf{u}$, rovnoběžný souhlasně (pro $k > 0$) resp. nesouhlasně (pro $k < 0$) s vektorem $\mathbf{u}$. Velikost tohoto vektoru je $|k| \cdot |\mathbf{u}|$. Speciálně: je-li $k = -1$, je $k \cdot \mathbf{u} = -1 \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$. Tento vektor nazýváme vektorem opačným k vektoru $\mathbf{u}$.

O souhlasně, popř. nesouhlasně rovnoběžných vektorech říkáme, že

- jsou kolineární

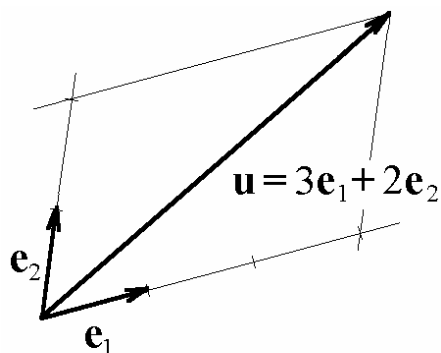
- leží v jedné přímce (je-li totiž $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$; $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$; $\mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$, pak body A, B, C leží na téže přímce)



součet vektorů

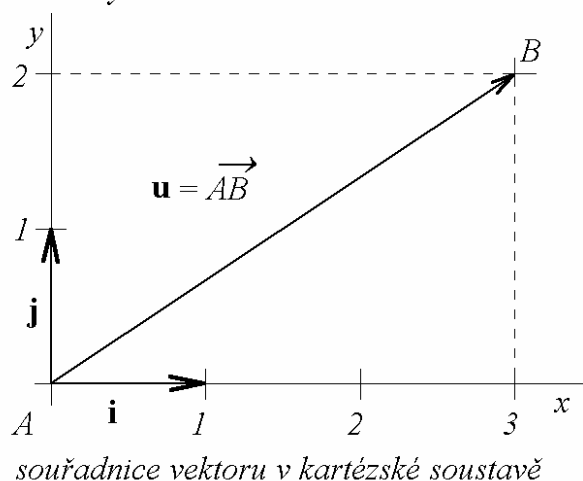
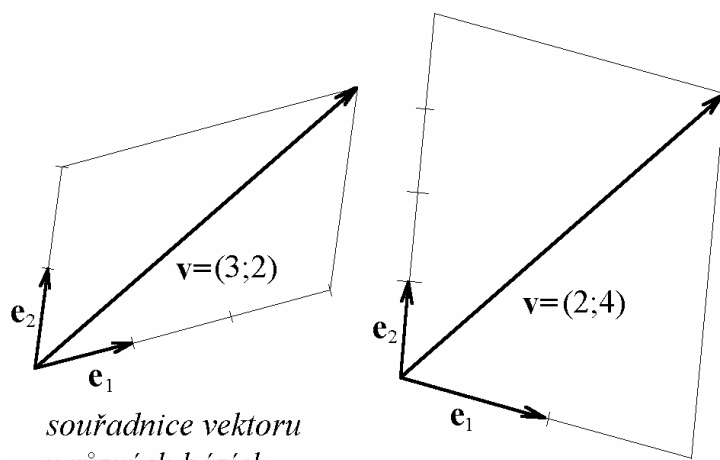
Součet dvou vektorů: Necht' $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$ jsou dva libovolné vektory; $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$. Umístíme vektor $\mathbf{v}$ do bodu B , koncový bod tohoto umístění označme C , tj. $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$. Součtem vektorů $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$ rozumíme vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$.

Tuto definici součtu vektorů znázorňuje připojený obrázek vlevo. Při konstrukci součtu dvou vektorů se často používá tzv. doplnění na rovnoběžník (viz obrázek vpravo).



lineární kombinace

Mějme dva nekolineární vektory $\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2$, tj. dva nenulové vektory, které neleží v jedné přímce. Pak každý vektor $\mathbf{u}$ v rovině lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$, kde $u_1; u_2 \in \mathbb{R}$. Říkáme, že jsme vektor $\mathbf{u}$ zapsali ve tvaru **lineární kombinace** vektorů $\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2$. Uspořádanou dvojici vektorů $[\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2]$, nazýváme **bází**, vektory $\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2$ **bázové**



vektory, čísla $u_1; u_2 \in \mathbb{R}$ nazýváme **souřadnice vektoru u** v bázi $[e_1; e_2]$. Píšeme pak $u = (u_1; u_2)$.

Dvojici navzájem kolmých vektorů nazýváme **ortogonální bázi**, jsou-li navíc oba tyto vektory jednotkové, hovoříme o **ortonormální bázi**. Složky ortonormální báze značíme většinou **i, j**. Dále budeme pracovat výhradně s touto ortonormální bází.

Uvedme nyní do souvislosti takto zavedené souřadnice vektoru v ortonormální bázi s kartézskými souřadnicemi, které jsme zavedli v kpt. 5.1. a se kterými jsme pracovali rovněž v kpt. 5.1. Je-li rovina opatřena kartézskou souřadnou soustavou $\langle O, x, y \rangle$, lze zvolit ortonormální bázi $[i, j]$, kde bázevé vektory jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Umístíme libovolný vektor do počátku. Jeho souřadnice jsou rovny kartézským souřadnicím koncového bodu tohoto umístění. Pak je např: $i = (1; 0)$; $j = (0; 1)$. Je-li $u = \overrightarrow{AB}$; $A = [0; 0]$;

$B = [3; 2]$, je $u = (3; 2)$. Je-li obecně $A = [a_1; a_2]$; $B = [b_1; b_2]$; $C = [c_1; c_2]$; $u = (u_1; u_2)$; $v = (v_1; v_2)$; $u = \overrightarrow{AB}$, je:

$$\begin{aligned} u &= B - A = [b_1; b_2] - [a_1; a_2] = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (u_1; u_2) \\ v &= (v_1; v_2) = v_1 \cdot i + v_2 \cdot j \\ |v| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ k \cdot u &= k \cdot (u_1; u_2) = (ku_1; ku_2) \\ -u &= -(u_1; u_2) = (-u_1; -u_2) \\ u + v &= (u_1; u_2) + (v_1; v_2) = (u_1 + v_1; u_2 + v_2) \\ C + u &= [c_1; c_2] + (u_1; u_2) = [c_1 + u_1; c_2 + u_2] \end{aligned}$$

1. Příklad: Je dáno $k = 2$; $v = (3; 5)$. Určeme vektor $u = k \cdot v$.

Řešení: $u = k \cdot v = 2 \cdot v = 2 \cdot (3; 5) = (2 \cdot 3; 2 \cdot 5) = (6; 10)$.

2. Příklad: Určeme souřadnice vektoru $u = \overrightarrow{AB}$, kde $A = [3; 7]$; $B = [-1; 2]$.

Řešení: $u = B - A = (-1 - 3; 2 - 7) = (-4; -5)$.

3. Příklad: Zjistíme, zda body $A = [-2; 10]$; $B = [7; 3]$; $C = [1; 5]$ leží na jedné přímce.

Řešení: Položme $u = \overrightarrow{AB} = B - A = (7 + 2; 3 - 10) = (9; -7)$;

$v = \overrightarrow{AC} = C - A = (1 + 2; 5 - 10) = (3; -5)$

Protože vektor $\mathbf{v}$ není násobkem vektoru $\mathbf{u}$, body A, B, C neleží na jedné přímce.

4. Příklad: Určeme součet a rozdíl vektorů $\mathbf{u} = (3; -2)$; $\mathbf{v} = (1; 8)$.

Řešení: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3; -2) + (1; 8) = (3+1; -2+8) = (4; 6)$,
 $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (3; -2) - (1; 8) = (3-1; -2-8) = (2; -10)$.

5. Příklad: Určeme souřadnice těžiště trojúhelníka ABC , je-li $A = [1; 2]$; $B = [3; 1]$; $C = [5; 3]$.

Řešení: Těžiště T leží např. na těžnici $t_a = AS_a$, kde S_a je střed úsečky BC . Je tedy

$$S_a = \left[\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2} \right] = \left[\frac{3+5}{2}; \frac{1+3}{2} \right] = [4; 2],$$

$$\overrightarrow{AS_a} = S_a - A = (4-1; 2-2) = (3; 0).$$

Těžiště T rozdělí těžnici AS_a tak, že $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AS_a} = \frac{2}{3} \cdot (3; 0) = (2; 0)$. Protože $\overrightarrow{AT} = T - A$,
je $T = A + \overrightarrow{AT} = [1; 2] + (2; 0) = [3; 2]$.

Řešme příklad 5 obecně pro vrcholy $A = [a_1; a_2]$; $B = [b_1; b_2]$; $C = [c_1; c_2]$:

$$S_a = \left[\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2} \right]$$

$$\overrightarrow{AS_a} = S_a - A = \left(\frac{b_1 + c_1}{2} - a_1; \frac{b_2 + c_2}{2} - a_2 \right) = \left(\frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{2}; \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AS_a} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{2}; \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{2} \right) = \left(\frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{3}; \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{3} \right)$$

$$T = A + \overrightarrow{AT} = [a_1; a_2] + \left(\frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{3}; \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{3} \right) = \left[a_1 + \frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{3}; a_2 + \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{3} \right] =$$

$$= \left[\frac{3a_1 + b_1 + c_1 - 2a_1}{3}; \frac{3a_2 + b_2 + c_2 - 2a_2}{3} \right] = \left[\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right].$$

Úhel dvou vektorů: Úhlem dvou nenulových vektorů rozumíme úhel, který svírají jejich reprezentanti. Úhel vektorů, z nichž alespoň jeden je nulový, se nedefinuje.

Skalární součin: Skalárním součinem dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$ rozumíme číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, pro které je

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos j} ;$$

kde j je úhel vektorů $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$. Skalární součin vektorů $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$, z nichž alespoň jeden je nulový, je roven nule.

Vlastnosti skalárního součinu:

$$(k \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = |k \cdot \mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos j = k \cdot (|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos j) = k \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$

Jsou-li vektory $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$ kolineární, je $j = 0 \Rightarrow \cos j = 1 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos j = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Speciálně $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|^2$.

Jsou-li vektory $\mathbf{u}; \mathbf{v}$ ortogonální, je $j = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos j = 0 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos j = 0$.

Je-li $\mathbf{u} = (u_1; u_2) = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = (v_1; v_2) = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$, je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1; u_2) \cdot (v_1; v_2) = (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}) = u_1 v_1 \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + u_2 v_1 \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_1 v_2 \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + u_2 v_2 \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}.$$

Vektory $\mathbf{i}; \mathbf{j}$ jsou ortogonální, je tedy $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$. Protože $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}|^2 = 1$; $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{j}|^2 = 1$, je

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2}.$$

Známe-li souřadnice vektorů, můžeme snadno zjistit jejich úhel: je-li $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$; $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$, je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos j \Rightarrow \cos j = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} \Rightarrow \boxed{\cos j = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}}.$$

6. Příklad: Určeme vektor $\mathbf{v}$, který má velikost $|\mathbf{v}| = 5$ a je kolmý k vektoru $\mathbf{u} = (16; 12)$.

Řešení: Skalární součin dvou kolmých vektorů je roven nule: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$. Ze zadané velikosti hledaného vektoru je: $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 5$. Pro neznámé souřadnice $v_1; v_2$ vektoru $\mathbf{v}$ tak máme soustavu dvou rovnic:

$$\begin{aligned} u_1 v_1 + u_2 v_2 &= 0 \\ \sqrt{v_1^2 + v_2^2} &= 5 \end{aligned}$$

Do první rovnice dosadíme známé souřadnice vektoru $\mathbf{u} = (16; 12)$:

$$16v_1 + 12v_2 = 0,$$

vyjádříme např. v_1 :

$$v_1 = -\frac{12v_2}{16} = -\frac{3v_2}{4}$$

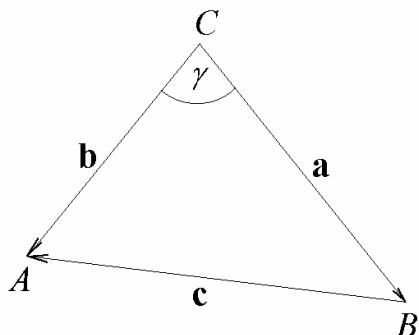
a dosadíme do druhé rovnice pro velikost vektoru:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(-\frac{3v_2}{4}\right)^2 + v_2^2} &= 5 \\ \frac{9 \cdot v_2^2}{16} + v_2^2 &= 25 \\ \frac{9 \cdot v_2^2 + 16 \cdot v_2^2}{16} &= 25 \\ \frac{25 \cdot v_2^2}{16} &= 25 \\ v_2^2 &= 16 \\ v_2 &= \pm 4 \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnic pro skalární součin je:

$$16v_1 + 12 \cdot (\pm 4) = 0 \Rightarrow 16v_1 \boxed{\pm} 48 = 0 \Rightarrow 16v_1 = \boxed{\mp} 48 \Rightarrow v_1 = \mp 3.$$

V tomto zápisu jsou skryty dvě rovnice (jedna pro $v_2 = +4$, druhá pro $v_2 = -4$). Všimněte si přehození znaménka (v rámečku) při převodu z jedné strany rovnice na druhou. Úloha má **dvě řešení**: $\mathbf{v}_1 = (4; -3)$; $\mathbf{v}_2 = (-4; 3)$ (při zápisu řešení je třeba brát současně vždy jen horní nebo jen dolní znaménka).



7. Příklad: Dokažme kosinovou větu užitím skalárního součinu vektorů

Řešení: V kpt. 6.6. jsme dokazovali kosinovou větu „synteticky“ (bez použití souřadnic). Chápeme-li strany trojúhelníka jako vektory, je důkaz velmi jednoduchý:

$$c^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = b^2 - 2ab \cos g + a^2$$

Neřešené úlohy:

- 1) V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{u}$; $\mathbf{E} - \mathbf{A} = \mathbf{v}$. Pomocí $\mathbf{u}; \mathbf{v}$ vyjádřete
a) $\mathbf{D} - \mathbf{C}$ b) $\mathbf{E} - \mathbf{D}$ c) $\mathbf{F} - \mathbf{E}$ d) $\mathbf{A} - \mathbf{F}$ e) $\mathbf{C} - \mathbf{A}$.
- 2) Určete $l; m; n$ tak, aby vektory $\mathbf{x}; \mathbf{y}$ byly kolinéární (rovnoběžné):
a) $\mathbf{x} = 3\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$; $\mathbf{y} = \mathbf{u} + m\mathbf{v} + n\mathbf{w}$ b) $\mathbf{x} = -2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + m\mathbf{w}$; $\mathbf{y} = l\mathbf{u} - 6\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$.
- 3) Vektory $\mathbf{u}; \mathbf{v}$ svírají úhel $j = \frac{p}{6}$ a mají velikosti $|\mathbf{u}| = \sqrt{3}; |\mathbf{v}| = 1$. Vypočtěte velikosti a úhel vektorů $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.
- 4) Určete úhel vektorů $\mathbf{u}; \mathbf{v}$; jestliže $|\mathbf{u}| = 5; |\mathbf{v}| = 8; |\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 7$.
- 5) Vypočtěte $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$, když $|\mathbf{u}| = 13; |\mathbf{v}| = 19; |\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 24$.
- 6) Vypočtěte obsah a velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$, je-li
a) $A = [0; 0]; B = [7; 1]; C = [2; 6]$ b) $A = [2; 5]; B = [-4; 2]; C = [9; -3]$.
- 7) Určete úhel úhlopříček čtyřúhelníka $ABCD$, je-li
 $A = [5; 2]; B = [-1; 6]; C = [-3; -2]; D = [2; -5]$.
- 8) Vypočtěte velikosti výšek $\triangle ABC$, je-li
a) $A = [5; 2]; B = [1; 5]; C = [-2; 1]$ b) $A = [7; 8]; B = [5; -2]; C = [-3; -6]$.

Výsledky

- 1 a) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ b) $-\mathbf{u}$ c) $-\mathbf{v}$ d) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ e) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 2) a) $m = -\frac{1}{3}; n = \frac{1}{3}$ b) $l = 4; m = -1$
- 3) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{7}$; $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 1$; $j = 40^\circ 54'$ 4) $j = 60^\circ$ 5) 22 6) a) $S = 20$; $a = g = 63^\circ 26'$; $b = 53^\circ 08'$ b) $S = \frac{69}{2}$; $a = 104^\circ 37'$; $b = 47^\circ 36'$; $g = 27^\circ 47'$ 7) $w = 84^\circ 42'$ 8) a) $5; 5; \frac{5}{2}\sqrt{2}$ b) $\frac{18}{5}\sqrt{5}; \frac{18}{37}\sqrt{74}; \frac{18}{13}\sqrt{26}$

7.3 Přímka v rovině

Pomocí souřadnic bodů můžeme číselně charakterizovat různé geometrické útvary. Např. pro souřadnice každého bodu $L = [x; y]$ v 1. kvadrantu platí $x \geq 0; y \geq 0$. Říkáme, že tyto nerovnosti **charakterizují** 1. kvadrant, resp. že jsou jeho **analytickým vyjádřením**. Podobně analytickým vyjádřením přímky rozumíme každý předpis, kterému vyhovují souřadnice libovolného bodu této přímky a žádné jiné.

Uvažujme nyní libovolnou přímku p . Zvolme libovolný bod $A \in p$ a libovolný nenulový vektor $\mathbf{u}$ rovnoběžný s přímkou p . Pro libovolný bod přímky X přímky p označme $\mathbf{v} = X - A$. Vektory $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$ jsou rovnoběžné, vektor $\mathbf{v}$ je tedy násobkem vektoru $\mathbf{u}$, tj. existuje reálné číslo t takové, že $\mathbf{v} = t \cdot \mathbf{u}$. Je tedy

$$\mathbf{v} = t \cdot \mathbf{u} \stackrel{\mathbf{v} = X - A}{\Rightarrow} X - A = t \cdot \mathbf{u} \Rightarrow \boxed{X = A + t \cdot \mathbf{u}}; t \in \mathbb{R}.$$

Poslední rovnici (v rámečku) nazýváme **parametrickou rovnicí přímky**. Číslo t nazýváme **parametr** bodu X . Probíhá-li parametr všechna reálná čísla, probíhá příslušný bod X celou přímkou p .

Geometrický význam parametru t : Uvažujme reprezentanta vektoru $\mathbf{u}$ s počátkem v bodě A , koncový bod tohoto reprezentanta označme B .

- 1) Bod X má od bodu A vzdálenost $|AX| = |t| \cdot |\mathbf{u}| = |t| \cdot |AB|$. Je-li tedy speciálně vektor $\mathbf{u}$ jednotkový, tj. $|\mathbf{u}| = |AB| = 1$, je $t = 1$.
- 2) Je-li $t \geq 0$, pak bod X leží na polopřímce $\overrightarrow{AB}$. Speciálně pro $t = 1$ je $X \equiv B$, pro $t = 0$ je $X \equiv A$.
- 3) Je-li $t \leq 0$, pak bod X leží na polopřímce opačné k $\overrightarrow{AB}$. Speciálně pro $t = 0$ je opět $X \equiv A$.

Zapišme parametrickou rovnici $X = A + t \cdot \mathbf{u}$ v souřadnicích. Je-li $X = [x; y]$; $A = [a_1; a_2]$; $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$, dostáváme:

$$\begin{aligned} [x; y] &= [a_1; a_2] + t \cdot (u_1; u_2) \\ [x; y] &= [a_1; a_2] + (t \cdot u_1; t \cdot u_2) \\ [x; y] &= [a_1 + t \cdot u_1; a_2 + t \cdot u_2] \end{aligned}$$

Jestliže se však dle poslední rovnice mají rovnat dva body, musí se rovnat jejich souřadnice. Dostáváme tedy **dvojici parametrických rovnic**

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1 \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 \end{aligned}}; t \in \mathbb{R}.$$

1. Příklad: Jsou dány body $A = [1; 2]$; $B = [4; 8]$. Určete parametrické rovnice

a) přímky $\overleftrightarrow{AB}$ b) polopřímky $\overrightarrow{AB}$ c) úsečky AB d) polopřímky $\overrightarrow{BA}$.

Řešení: Ve všech případech budeme potřebovat směrový vektor. Můžeme položit $\mathbf{u} = B - A = (3; 6)$. Pak je $\overrightarrow{AB} \equiv X = A + t \cdot \mathbf{u}$; $t \in \mathbb{R}$; což rozepsáno do souřadnic je:

$$\text{a) } \vec{AB} \equiv x = 1 + 3 \cdot t ; t \in \mathbb{I} .$$

$$y = 2 + 6 \cdot t$$

b) Rovnice budou stejné, pouze podle výše uvedeného bodu 2) musí být $t \geq 0$, tedy

$$\vec{AB} \equiv x = 1 + 3 \cdot t ; t \geq 0 .$$

$$y = 2 + 6 \cdot t$$

c) Rovnice budou opět stejné. Opět podle bodu 2) musí být $t \geq 0$. Pro $t = 0$ je $X \equiv A$, s rostoucím parametrem se proměnný bod X vzdaluje od bodu A . Protože $\vec{u} = \vec{B} - \vec{A}$, je podle bodu 2) $X \equiv B$ pro $t = 1$. Je tedy

$$\vec{AB} \equiv x = 1 + 3 \cdot t ; t \in \langle 0; 1 \rangle$$

$$y = 2 + 6 \cdot t$$

d) Řešení případu b) svádí k závěru, že rovnice polopřímky $\vec{BA}$ budou

~~$$\vec{BA} \equiv x = 1 + 3 \cdot t ; t \leq 0$$~~
~~$$y = 2 + 6 \cdot t$$~~

To ovšem není správně, neboť se v tomto případě jedná o rovnici polopřímky opačné k polopřímce $\vec{AB}$, což samozřejmě není polopřímka $\vec{BA}$. Polopřímka $\vec{BA}$ má počátek v bodě B , musí tedy být

$$\vec{BA} \equiv x = 4 - 3 \cdot t ; t \geq 0$$

$$y = 8 - 6 \cdot t$$

Poznámka: Pokud jde o rovnici přímky, nezáleží ani na velikosti ani na orientaci směrového vektoru. Pro $t \in \mathbb{I}$ jsou rovnice

$$x = 1 + 3 \cdot t ; x = 1 + t ; x = 1 - t$$

$$y = 2 + 6 \cdot t ; y = 2 + 2t ; y = 2 - 2t$$

rovnici téže přímky. U polopřímky samozřejmě záleží na orientaci směrového vektoru - jestliže ji měníme, pak měníme polopřímku v polopřímku opačnou. Chceme-li vyjádřit tutéž polopřímku, musíme se změnou orientace směrového vektoru současně změnit znaménko parametru, např:

$$\vec{BA} \equiv x = 1 + 3 \cdot t ; t \leq 0$$

$$y = 2 + 6 \cdot t$$

$$\vec{BA} \equiv x = 4 + t ; t \leq 0$$

$$y = 8 + 2 \cdot t$$

$$\vec{BA} \equiv x = 4 - t ; t \geq 0$$

$$y = 8 - 2 \cdot t$$

Obecná rovnice přímky v rovině: Uvažujme přímku vyjádřenou obecně parametrickými rovnicemi

$$x = a_1 + t \cdot u_1 ; t \in \mathbb{I} .$$

$$y = a_2 + t \cdot u_2$$

Z této soustavy dvou lineárních rovnic vyloučíme parametr:

$$\begin{array}{r}
 x = a_1 + t \cdot u_1 / \cdot u_2 \\
 y = a_2 + t \cdot u_2 / \cdot (-u_1) \\
 \hline
 u_2 x = u_2 a_1 + t \cdot u_1 \cdot u_2 \\
 -u_1 y = -u_1 a_2 - t \cdot u_2 \cdot u_1 \\
 \hline
 u_2 x - u_1 y = u_2 a_1 - u_1 a_2 \\
 u_2 x - u_1 y - u_2 a_1 + u_1 a_2 = 0
 \end{array}$$

Poslední rovnici většinou píšeme ve tvaru

$$\boxed{ax + by + c = 0}, \text{ kde } a, b, c \in \mathbb{R}$$

a nazýváme ji **obecnou rovnicí přímky v rovině**.

Z předchozí úpravy je zřejmé, že v tomto tvaru je $a = u_2$; $b = -u_1$. Je-li $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$ směrový vektor přímky a označíme-li $\mathbf{n} = (a; b) = (u_2; -u_1)$, je

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = (u_1; u_2) \cdot (u_2; -u_1) = u_1 u_2 - u_2 u_1 = 0$$

Vektory $\mathbf{n}; \mathbf{u}$ jsou tedy na sebe kolmé. Vektor $\mathbf{n} = (a; b)$ nazýváme **normálovým vektorem přímky**.

Převod parametrických rovnic na rovnici obecnou je v konkrétních případech většinou jednodušší:

1. Příklad: Napišme obecnou rovnici přímky zadané parametrickými rovnicemi:

$$\begin{array}{r}
 x = -7 + 6t \\
 y = 3 + 2t / \cdot 3 \\
 \hline
 x = -7 + 6t \\
 -(3y = 9 + 6t) \\
 \hline
 x - 3y = -16 \\
 x - 3y + 16 = 0
 \end{array}$$

Lze také využít toho, že koeficienty a, b v obecné rovnici jsou souřadnicemi normálového vektoru: Je-li

$$p \equiv \begin{cases} x = -7 + 6t \\ y = 3 + 2t \end{cases},$$

pak směrový vektor je $\mathbf{s} = (6; 2)$ a normálový $\mathbf{n} = (2; -6)$. Obecná rovnice této přímky je tedy $2x - 6y + c = 0$. Koeficient c určíme z podmínky, že bod $A = [-7; 3]$ leží na hledané přímce a jeho souřadnice musí tedy obecné rovnici vyhovovat: $2 \cdot (-7) - 6 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = 32$. Hledaná rovnice je tedy $2x - 6y + 32 = 0$ (můžeme pak samozřejmě ještě vydělit dvěma).

2. Příklad: Napišme obecnou rovnici přímky, která prochází body $A = [3; 7]$; $B = [-2; 1]$.

Řešení:

a) Pomocí parametrických rovnic: Směrovým vektorem je vektor

$\mathbf{s} = B - A = (-2 - 3; 1 - 7) = (-5; -6)$ a přímka prochází např. bodem $A = [3; 7]$. Je tedy:

$$\begin{array}{r} x = 3 - 5t / \cdot 6 \\ y = 7 - 6t / \cdot (-5) \\ \hline 6x - 5y = -17 \\ 6x - 5y + 17 = 0 \end{array}$$

b) Pomocí normálového vektoru: Směrový vektor je $\mathbf{s} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (-5; -6)$, normálový tedy $\mathbf{n} = (6; -5)$. Připomeňme, že $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0$, proto je třeba zaměnit souřadnice a u jedné z nich změnit znaménko. Obecná rovnice je $6x - 5y + c = 0$ a protože např. $A \in p$, je $6 \cdot 3 - 5 \cdot 7 + c = 0 \Rightarrow c = 17$. Hledaná rovnice je tedy $6x - 5y + 17 = 0$.

Směrnice tvar rovnice přímky: Vyjádřeme z obecné rovnice $ax + by + c = 0$ proměnnou y :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Dostáváme tzv. **směrnice tvar rovnice přímky**. Tuto rovnici píšeme obvykle ve tvaru

$$\boxed{y = kx + q},$$

kde $k = \operatorname{tg} j$ je tzv. **směrnice přímky** (j je orientovaný úhel, který svírá přímka s kladnou poloosou x) a q je **úsek, který přímka vytíná na ose y** . Je-li přímka zadána dvěma body $A = [a_1; a_2]$; $B = [b_1; b_2]$, pak pro její směrnici platí:

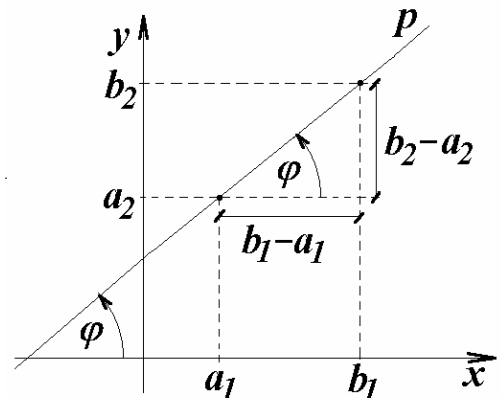
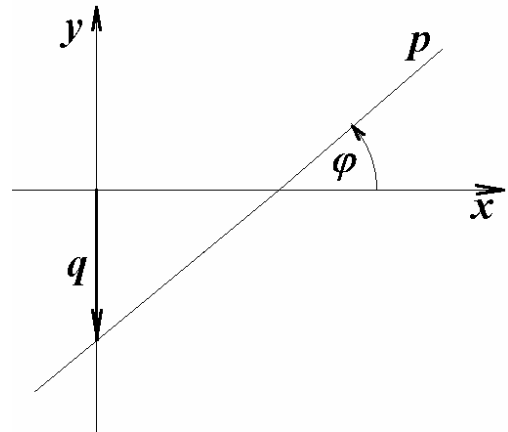
$$k = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}.$$

Má-li přímka rovnici $y = kx + q$ a prochází-li bodem o souřadnicích $[x_0; y_0]$, dostáváme po dosazení

$$y_0 = kx_0 + q \Rightarrow q = y_0 - kx_0,$$

tedy

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}.$$



3. Příklad: Napišme rovnici přímky, která prochází body $A = [3; 7]$; $B = [-2; 1]$.

Řešení: Podle výše uvedených vzorců je $k = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{1 - 7}{-2 - 3} = \frac{6}{5}$ a položíme-li např.

$A = [3; 7] = [x_0; y_0]$, dostáváme:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 7 = \frac{6}{5}(x - 3)$$

$$y = \frac{6}{5}x - 3 \cdot \frac{6}{5} + 7$$

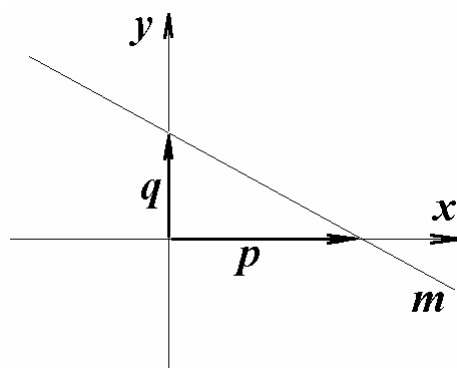
$$y = \frac{6}{5}x + \frac{17}{5} \quad (\text{směrnice tvar}) \Rightarrow 5y = 6x + 17 \Rightarrow 6x - 5y + 17 = 0 \quad (\text{obecný tvar}).$$

Úsekový tvar rovnice přímky: Obecnou rovnici přímky $ax + by + c = 0$, kde $c \neq 0$, lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ ax + by &= -c / : (-c) \\ \frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} &= 1 \end{aligned}$$

Pro $a, b \neq 0$ lze položit $-\frac{c}{a} = p$; $-\frac{c}{b} = q$ a dostáváme tzv. úsekový tvar rovnice přímky:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}.$$



Čísla p, q jsou úseky, které přímka vytíná na souřadných osách.

4. Příklad: Napišme obecnou rovnici přímky, která na ose x vytíná úsek $p = 3$ a na ose y úsek $q = -2$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} &= 1 \\ -2x + 3y &= -6 \\ 2x - 3y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

5. Příklad: Převed'me na úsekový tvar obecnou rovnici přímky :

$$3x - y + 4 = 0$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 3x - y + 4 &= 0 \\ 3x - y &= -4 \\ \frac{3x}{-4} - \frac{y}{-4} &= 1 \\ \frac{x}{-\frac{4}{3}} + \frac{y}{4} &= 1 \Rightarrow p = -\frac{4}{3}; q = 4 \end{aligned}$$

Vzdálenost bodu od přímky: Určení vzdálenosti bodu $X_0 = [x_0; y_0]$ od přímky $p \equiv ax + by + c = 0$ spočívá ve stanovení velikosti úsečky PX_0 , kde $P = [p_1; p_2]$ je pata kolmice spuštěné z bodu X_0 na přímku p . Vzhledem k tomu, že vektor $\mathbf{n}_p = (a; b)$ je normálovým vektorem přímky p , musí být současně směrovým vektorem přímky q , která je na přímku p kolmá. Je tedy $\mathbf{n}_p = (a; b) = \mathbf{s}_q$. Protože navíc $X_0 = [x_0; y_0] \in q$, je kolmice q určena parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} q \equiv x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

Vzdálenost v libovolného bodu $X = [x; y] \in q$ od bodu $X_0 = [x_0; y_0] \in q$ je pak

$$v = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \stackrel{[x; y] \in q}{=} \sqrt{(x_0 + at - x_0)^2 + (y_0 + bt - y_0)^2} = \sqrt{a^2 t^2 + b^2 t^2} = |t| \sqrt{a^2 + b^2}$$

Je-li $X \equiv P$ (tj. $X \in p \cap q$), musí tento bod splňovat současně rovnice přímek $p; q$ a pro hodnotu parametru t tak máme:

$$\begin{aligned} a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c &= 0 \\ ax_0 + a^2 t + by_0 + b^2 t + c &= 0 \\ (a^2 + b^2)t &= -ax_0 - by_0 - c \\ t &= -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Dosazením do výše uvedeného vztahu pro vzdálenost dostaneme:

$$v = \left| t \sqrt{a^2 + b^2} \right| = \left| -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} \right| = \frac{|-(ax_0 + by_0 + c)| \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pro vzdálenost v bodu $X_0 = [x_0; y_0]$ od přímky $p \equiv ax + by + c = 0$ tedy platí

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

6) Příklad: Určeme výšku v_a v $\triangle ABC$, je-li $A = [2; 1]; B = [6; -1]; C = [4; 5]$.

Řešení: Hledaná výška je vzdálenost vrcholu A od přímky $p \equiv \overleftrightarrow{BC}$. Směrový vektor této přímky je např. $\overrightarrow{BC} = C - B = (4 - 6; 5 + 1) = (-2; 6)$ a protože $B \in p$, je

$$p \equiv x = 6 - 2t$$

$$y = -2 + 6t$$

Vyloučením parametru dostaneme obecnou rovnici tvaru $p \equiv 3x + y - 16 = 0$, a tedy

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 16|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{10}.$$

Neřešené úlohy:

1) Napište parametrické rovnice přímky určené bodem A a vektorem u :

a) $A = [7; -1]; u = (3; -4)$ b) $A = [-2; -3]; u = (0; 4)$ c) $A = [0; 3]; u = (-7; 0)$

d) $A = [0; 0]; u = (1; 0)$.

2) Jsou dány body $A = [5; 2]; B = [3; 7]; C = [-4; 9]$. Napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem A rovnoběžně s přímkou určenou body B, C .

3) Zjistěte, zda dané body leží na přímce $x = 1 - t; y = 3t$:

a) $A = [3; -7]$ b) $B = [0; 3]$ c) $C = [-5; 18]$ d) $D = [-14; -1]$.

4) Zjistěte vzájemnou polohu daných přímek. Jestliže se protínají, najděte jejich průsečík:

a) $x = 7 - 2s; y = 3 + s$ a $x = 4 - t; y = 3t$ b) $x = 5 - 3s; y = -3 + s$ a $x = 20 + 9t; y = -8 - 3t$.

5) Najděte obecné rovnice přímek:

a) $x = -7 + 6t; y = 3 + 2t$ b) $x = 3t; y = 1 - 2t$ c) $x = 4 - 3t; y = t$.

6) Rozhodněte, zda body $A = [-3; 1]; B = [7; 2]; C = [0; 5]$ leží na přímce $4x - 3y + 15 = 0$.

7) Jaké podmínky musí splňovat koeficienty a, b, c , aby přímka $ax + by + c = 0$

a) byla rovnoběžná s osou x a nesplynula s ní?

b) byla osou x ?

c) byla rovnoběžná s osou y a nesplynula s ní?

d) byla osou y ?

e) procházela počátkem?

8) Napište rovnici osy úsečky AB , je-li $A = [-3; 1]; B = [4; -3]$.

9) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází body:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = [-7; 8]; B = [3; -2] & \text{b) } M = \left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]; N = \left[7; \frac{2}{3}\right] \\ \text{c) } E = [3; 9]; F = [-3; 15] & \text{d) } G = [0; -3]; H = [15; -3] \end{array}$$

10) Na přímce $4x - 12y - 2 = 0$ najděte bod, který má od přímky $5x + 12y + 5 = 0$ vzdálenost $v = 3$.

Výsledky:

- 1) a) $x = -7 + 3t; y = 1 - 4t$ b) $x = -2; y = -3 + 4t$ c) $x = -7t; y = 3$ d) $x = t; y = 0$
 2) $x = 2 - 7t; y = 5 + 2t$ 3) a) ne b) ano c) ano d) ne 4) a) různoběžky, $P = \left[\frac{11}{5}; \frac{27}{5}\right]$
 b) splývající rovnoběžky 5) a) $x - 3y + 10 = 0$ b) $2x + 3y - 3 = 0$ c) $x + 3y - 4 = 0$ 6) A, C leží, B neleží 7) a) $a = 0; c \neq 0$ b) $a = c = 0$ c) $b = 0; c \neq 0$ d) $c = 0$ 8) $14x - 8y - 15 = 0$
 9) a) $x + y - 1 = 0$ b) $3x + 276y - 205 = 0$ c) $x - 3 = 0$ d) $y + 3 = 0$
 10) $M_1 = \left[4; \frac{7}{6}\right]; M_2 = \left[-\frac{14}{3}; -\frac{31}{18}\right]$.

7.4 Dvě přímky v rovině

Dvě přímky v rovině mohou mít následující vzájemné polohy:

- a) Přímky jsou různoběžné - mají společný právě jeden bod (průsečík).
 b) Přímky jsou rovnoběžné různé - nemají žádný společný bod.
 c) Přímky jsou splývající - mají nekonečně mnoho společných bodů.

1. Příklad: Určeme průsečík přímek:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{array}{l} x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{array} & \text{b) } \begin{array}{l} p \equiv x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \end{array} & \text{c) } \begin{array}{l} q \equiv x = 2 - s \\ y = -1 + s \end{array} \end{array}$$

Řešení:

a) Průsečík dvou přímek jako jejich společný bod musí vyhovovat oběma rovnicím, řešíme tedy soustavu dvou rovnic:

$$\begin{array}{r} x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \\ \hline 7x + 5 = 0 \end{array}$$

$$x = -\frac{5}{7}$$

Dosazením např. do první rovnice pak dostaneme $y = -\frac{1}{7}$. Průsečíkem je tedy

$$\text{bod } P = \left[-\frac{5}{7}; -\frac{1}{7}\right].$$

b) Opět řešíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{r} 3 + 2t = 2 - s \\ +(1 - t = -1 + s) \\ \hline 4 + t = 1 \\ t = -3 \\ s = 5 \end{array}$$

Dosazením do kterékoliv parametrické rovnice dostáváme $P = [-3; 4]$.

c) Parametrické vyjádření přímky q dosadíme do obecné rovnice přímky p :

$$\begin{array}{r} 7(6 - 2t) - 9(15t) + 2 = 0 \\ 42 - 14t - 135t + 2 = 0 \\ t = \frac{44}{149} \end{array}$$

Dosazením zjištěné hodnoty parametru do parametrických rovnic přímky q dostáváme

$$\begin{array}{l} x = 6 - 2t = 6 - 2 \cdot \frac{44}{149} = \frac{806}{149}; \\ y = 15t = 15 \cdot \frac{44}{149} = \frac{660}{149}, \text{ tedy} \\ P = \left[\frac{806}{149}; \frac{660}{149}\right]. \end{array}$$

2. Příklad: Ukažme, že dané přímky jsou rovnoběžné:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x+3y-1=0 & \text{b) } p \equiv x=2-t & q \equiv x=3-2s \\ & 4x+6y+5=0 & y=1+t \quad y=4+2s \end{array} \quad \text{c) } p \equiv x+2y+1=0 \quad q \equiv x=-2t \\ & & y=3+t$$

Řešení:

Pokusme se zopakovat řešení soustav z předchozího příkladu:

$$\begin{array}{lll} 2x+3y-1=0 \cdot (-2) & 2-t=3-2s & -2t+2(3+t)+1=0 \\ \text{a) } 4x+6y+5=0 & \text{b) } \frac{+(1+t=4+2s)}{3=7} & \text{c) } 7=0 \\ 7=0 & & \end{array}$$

Ani v jednom případě soustava nemá řešení. Soustavy jsme však vůbec řešit nemuseli, stačilo si všimnout normálových, resp. směrových vektorů daných přímek. V případě a) jsou normálové vektory $\mathbf{n}_a = (2, 3)$; $\mathbf{n}_b = (4, 6)$, normálové vektory a tedy i přímky samotné jsou rovnoběžné. V případě b) jsou směrové vektory $\mathbf{s}_a = (-1; 1)$; $\mathbf{s}_b = (-2; 2)$ opět rovnoběžné. V případě c) je normálový vektor první přímky $\mathbf{n}_a = (1; 2)$, směrový vektor druhé $\mathbf{s}_b = (-2; 1)$. Tyto vektory jsou navzájem kolmé, směrové vektory tedy musí být rovnoběžné.

3. Příklad: Určeme vzájemnou polohu přímek:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x+y-1=0 & \text{b) } p \equiv x=3+5t & q \equiv x=-2-10s \\ & 6x+3y-3=0 & y=1-t \quad y=2+2s \end{array} \quad \text{c) } p \equiv 2x+y-5=0 \quad q \equiv x=1-t \\ & & y=3+2t$$

Řešení:

a) Druhá rovnice je trojnásobkem rovnice první, soustava má tedy nekonečně mnoho řešení a přímky splývají.

$$\begin{array}{ll} \text{b) } & \text{c) } \\ 3+5t=-2-10s & 2(1-t)+(3+2t)-5=0 \\ 1-t=2+2s \cdot 5 & 2-2t+3+2t-5=0 \\ \hline 3+5t=-2-10s & 0=0 \\ 5-5t=10+10s & \\ \hline 8=8 & \end{array}$$

Také v těchto dvou případech dostáváme nekonečně mnoho řešení – přímky splývají.

Jestliže jsou dvě přímky různoběžné, svírají spolu úhel, který nazýváme **odchylkou přímek**. Tato odchylka je rovna úhlu, který svírají směrové resp. normálové vektory těchto přímek. Úhel dvou vektorů vypočítáme dle kpt. 7.2. Pro přímky zadané obecnými rovnicemi $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ dostáváme pro jejich odchylku j vzorec

$$\cos j = \frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

Speciálně pro dvě navzájem kolmé přímky platí

$$a_1a_2+b_1b_2=0.$$

Jednoduchou úpravou tohoto vztahu obdržíme $\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = -1$. Tyto zlomky jsou však směrnici $k_1; k_2$ daných přímek (viz předchozí kapitolu). Pro kolmé přímky ve směrnicovém tvaru tedy platí $k_1 k_2 = -1$.

Neřešené úlohy:

1) Určete průsečík přímek (pokud existuje):

a) $6x - 5y + 25 = 0$; $x = -5 + 5t$; $y = -1 + 6t$ b) $3x - 7y + 29 = 0$; $x = 15 + 14t$; $y = 23 + 6t$

c) $2x - 5y + 6 = 0$; $8x + 15y + 10 = 0$ d) $2x + 2y - 7 = 0$; $9x + 9y - 14 = 0$.

2) Určete koeficient a tak, aby přímka $ax - 3ay + 5 = 0$ procházela průsečíkem přímek $3x + 2y - 6 = 0$; $5x - 7y + 2 = 0$.

3) Stanovte koeficient a tak, aby přímka $ax + 4y - 9 = 0$ byla kolmá k přímce $2x - 3y + 7 = 0$.

4) Napište rovnici přímky, která prochází bodem $B = [3; 5]$ kolmo k přímce $2x - 7y + 3 = 0$.

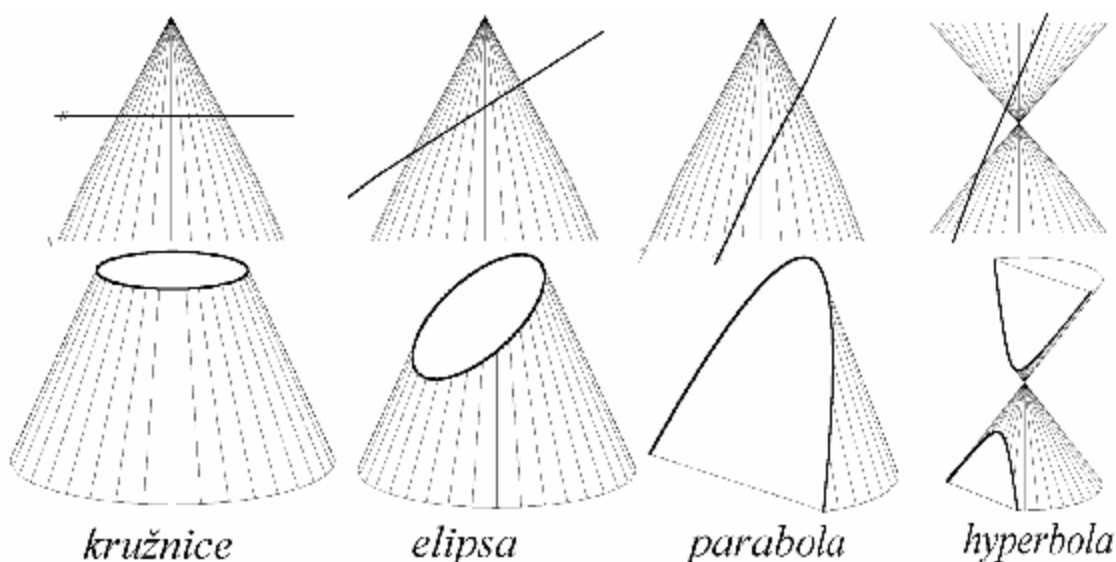
5) Vypočítejte odchylku přímek a) $2x - 3y + 4 = 0$; $x - y + 1 = 0$ b) $3x - 7 = 0$; $x + y + 13 = 0$.

Výsledky: 1) a) přímky splývají b) přímky rovnoběžné různé c) různoběžky, $P = \left[-2; \frac{2}{5}\right]$

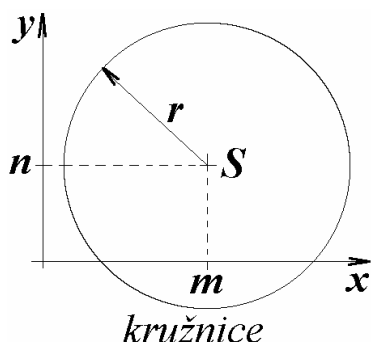
d) přímky rovnoběžné různé 2) $a = \frac{31}{14}$ 3) $a = 6$ 4) $7x + 2y - 31 = 0$ 5) a) $11^\circ 51' 11''$ b) 45° .

7.5 Kuželosečky

Sestrojíme řez rotační kuželové plochy rovinou r , která neprochází vrcholem kuželové plochy. Dostaneme křivku zvanou **kuželosečka**. Podle vzájemné polohy roviny r a kuželové plochy je to kružnice, elipsa, parabola nebo hyperbola. Jednotlivé případy zachycuje připojený obrázek.



Kružnice: je množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu (středu S) stálou vzdálenost (poloměr r). Kružnice, která má střed v bodě $S = [m; n]$, má tedy rovnici (tzv. středová rovnice)



$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2.$$

Pro střed v počátku je tedy speciálně $x^2 + y^2 = r^2$. Středovou rovnici lze roznásobením upravit na rovnici obecnou:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Kružnice je určena třemi svými body.

- 1. Příklad:** Určeme rovnici kružnice, je-li znám její střed a poloměr: **a)** $S = [0; -3]$; $r = \sqrt{2}$
b) $S = [-1; 1]$; $r = 1$.

Řešení: **a)** $(x-0)^2 + (y+3)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + (y+3)^2 = 2$ **b)** $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

- 2. Příklad:** Najdeme střed a poloměr kružnice: **a)** $k \equiv x^2 + y^2 - 5x + 4y = 2$
b) $k \equiv x^2 + y^2 + 4x + 6y + 20 = 0$

Řešení: Rovnici kružnice doplníme na úplný čtverec:

a)

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 + 4y + 4 = 2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

b)

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 20 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = -20 + 4 + 9$$

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = -7$$

Tedy $S = [2.5; -2]$; $r = 3.5$.

Rovnice není rovnicí kružnice.

- 3. Příklad:** Najdeme střed a poloměr kružnice, která prochází body $K = [5, 5]$; $L = [3, 1]$; $M = [0, 0]$.

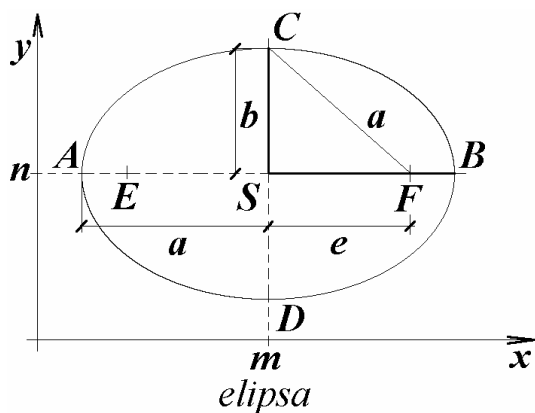
Řešení: Má-li kružnice procházet zadanými body, musí souřadnice těchto bodů vyhovovat rovnici kružnice. Dosazením např. do obecné rovnice $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ tak obdržíme pro neznámé koeficienty A, B, C soustavu tří rovnic:

$$\begin{array}{l} K \in k: 5^2 + 5^2 + 5A + 5B + C = 0 \\ L \in k: 3^2 + 1^2 + 3A + B + C = 0 \\ M \in k: 0^2 + 0^2 + 0A + 0B + C = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Z poslední rovnice je okamžitě } C = 0, \text{ je tedy} \\ \left. \begin{array}{l} 5A + 5B = -50 \\ 3A + B = -10 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0; B = -10.$$

Kružnice má tedy obecnou rovnici $x^2 + y^2 - 10y = 0$. Jejím doplněním na čtverec dostaneme $x^2 + y^2 - 10y + 25 = 25 \Rightarrow x^2 + (y-5)^2 = 25$. Je tedy $S = [0; 5]$; $r = 5$.

Elipsa: Je množina všech bodů v rovině, které mají od daných dvou bodů (ohnisek E, F) stálý součet vzdáleností ($2a$) – viz připojený obrázek na další straně.

Pro libovolný bod M elipsy tedy platí $|ME| + |MF| = 2a$. Spojnici libovolného bodu elipsy s ohniskem nazýváme **průvodič**. Střed S úsečky EF nazýváme **středem elipsy**. Body A, B jsou **hlavní vrcholy elipsy**, platí $|SA| = |SB| = a$, a je **hlavní poloosa**. C, D jsou **vedlejší**



vrcholy, platí $|SC|=|SD|=b$, b je **vedlejší poloosa**, $|ES|=|FS|=e$ – **výstřednost** (excentricita) elipsy. Dále je $a^2 = b^2 + e^2$, $|EC|=|FC|=|ED|=|FD|=a$. Elipsa se středem v bodě $S=[m;n]$, hlavní poloosou a rovnoběžnou s osou x a vedlejší poloosou b rovnoběžnou s osou y má rovnici (tzv. středová rovnice elipsy)

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Pro střed v počátku je tedy speciálně $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Platí $a \geq b > 0$. Je-li $a = b$, dostáváme speciálně kružnici se středem S a poloměrem $r = a = b$. Je-li hlavní poloosa a rovnoběžná s osou y , je $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$, resp. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Středovou rovnici lze roznásobením upravit na rovnici obecnou:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0; A > 0, B > 0,$$

kde pro $A = B$ se speciálně opět jedná o kružnici.

4. Příklad: Zjistíme, zda rovnice $3x^2 + 2y^2 + 6x - 5 = 0$ je rovnicí elipsy s osami rovnoběžnými se souřadnými osami. Je-li tomu tak, určíme střed a poloosy.

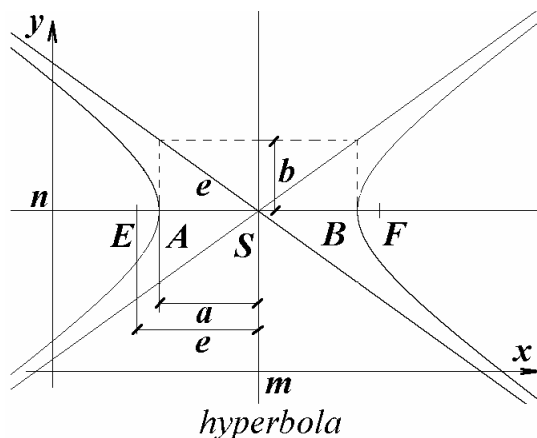
Řešení:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2y^2 + 6x - 5 &= 0 \\ 3 \cdot (x^2 + 2x) + 2y^2 + 6x &= 5 \\ 3 \cdot (x^2 + 2x + 1) + 2y^2 + 6x &= 5 + 3 \\ 3 \cdot (x+1)^2 + 2y^2 &= 8 : 8 \\ \frac{3 \cdot (x+1)^2}{8} + \frac{2y^2}{8} &= 1 \\ \frac{3 \cdot (x+1)^2}{8} + \frac{y^2}{4} &= 1. \\ \frac{3}{8} & \end{aligned}$$

Jedná se tedy o elipsu se středem $S = [-1; 0]$ a poloosami $b = \sqrt{4} = 2$; $a = \sqrt{\frac{8}{3}}$, hlavní osa je rovnoběžná s osou y .

Hyperbola: je množina všech bodů v rovině, které mají od daných dvou bodů (ohnisek E, F) stálou absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností ($2a$) – viz připojený obrázek.

Pro libovolný bod M hyperboly tedy platí $||ME| - |MF|| = 2a$. Spojnici libovolného bodu elipsy s ohniskem nazýváme **průvodič**. Střed S úsečky EF nazýváme **středem hyperboly**. Body A, B jsou **hlavní vrcholy hyperboly**, platí $|SA| = |SB| = a$, a je **hlavní poloosa**. C, D



jsou vedlejší vrcholy, platí $|SC|=|SD|=b$ b je **vedlejší poloosa**, $|ES|=|FS|=e$, e je **výstřednost** (excentricita) hyperboly. Dále je $e^2 = a^2 + b^2$. Hyperbola se středem v bodě $S=[m;n]$, hlavní poloosou a rovnoběžnou s osou x a vedlejší poloosou b rovnoběžnou s osou y má rovnici (tzv. středová rovnice hyperboly)

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Pro střed v počátku je tedy speciálně $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Je-li hlavní poloosa a rovnoběžná s osou y , je $-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$, resp. $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Přímky $a_1; a_2$ procházející středem hyperboly se směrnici $\pm \frac{b}{a}$ se nazývají asymptoty. Je-li $a=b$, nazýváme hyperbolu rovnoosou. Otočíme-li rovnoosou hyperbolu se středem v počátku okolo tohoto počátku o 45° , přejde její rovnice do tvaru $y = \frac{c}{x}$ – takto otočená rovnoosá hyperbola je grafem nepřímé úměrnosti.

Středovou rovnici hyperboly lze roznásobením upravit na rovnici obecnou:

$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0; A > 0, B > 0$$

pro hyperbolu s hlavní osou rovnoběžnou s osou x , resp.

$$-Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0; A > 0, B > 0$$

pro hyperbolu s hlavní osou rovnoběžnou s osou y .

5. Příklad: Zjistíme, zda rovnice $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$ je rovnicí hyperboly s osami rovnoběžnými se souřadnými osami. Je-li tomu tak, určíme její střed a poloosy.

Řešení:

$$9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$$

$$9 \cdot (x^2 - 4x) - 16 \cdot (y^2 - 2y) = 124$$

$$9 \cdot (x^2 - 4x + 4) - 16 \cdot (y^2 - 2y + 1) = 124 + 36 - 16$$

$$9 \cdot (x-2)^2 - 16 \cdot = 144 / :144$$

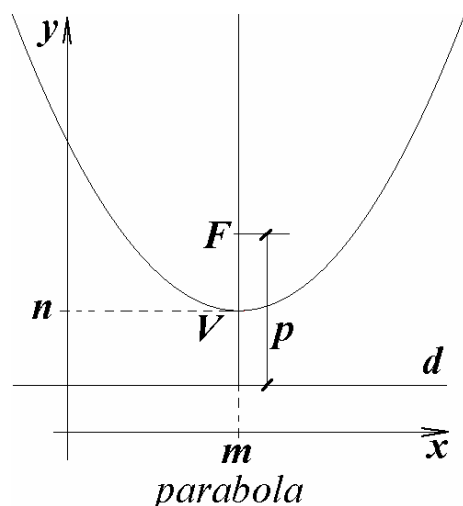
$$\frac{9 \cdot (x-2)^2}{144} - \frac{16 \cdot (y-1)^2}{144} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Jedná se tedy o hyperbolu se středem $S=[2;1]$ a poloosami $a=4; b=3$, její hlavní osa je rovnoběžná s osou x .

Parabola: je množina všech bodů v rovině, které mají od dané přímky (řídící přímka d) a daného bodu, který na této přímce neleží (ohnisko F), stejnou vzdálenost – viz připojený obrázek.

Kolmice spuštěná z ohniska na řídící přímku se nazývá **osa paraboly**, vzdálenost p ohniska od řídící přímky se nazývá **parametr paraboly**. Střed úsečky určené ohniskem a průsečíkem osy paraboly se řídící přímkou se nazývá vrchol paraboly. Parabola, jejíž vrchol má souřadnice $V = [m, n]$ a osa je rovnoběžná s osou x , má rovnici



$$(y - n)^2 = 2p(x - m) \Leftrightarrow F = \left[m + \frac{p}{2}; n \right];$$

$$(y - n)^2 = -2p(x - m) \Leftrightarrow F = \left[m - \frac{p}{2}; n \right];$$

je-li osa je rovnoběžná s osou y , pak

$$(x - m)^2 = -2p(y - n) \Leftrightarrow F = \left[m; n - \frac{p}{2} \right];$$

$$(x - m)^2 = 2p(y - n) \Leftrightarrow F = \left[m; n + \frac{p}{2} \right].$$

Jedná se o tzv. vrcholové rovnice paraboly. Speciálně pro vrchol v počátku přejdou tyto rovnice na tvary:

$$y^2 = 2px; \quad y^2 = -2px; \quad x^2 = 2py; \quad x^2 = -2py.$$

Roznásobením mocnin ve vrcholových rovnicích paraboly s vrcholem $V = [m, n]$ obdržíme obecnou rovnici paraboly, která je tvaru

$$y^2 + Ax + By + C = 0; \quad A \neq 0 \quad \text{pro osu rovnoběžnou s osou } x, \text{ resp.}$$

$$x^2 + Ay + Bx + C = 0; \quad A \neq 0 \quad \text{pro osu rovnoběžnou s osou } y.$$

5. Příklad: Zjistíme vrchol, ohnisko, parametr a polohu paraboly $y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$.

Řešení:

$$y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$$

$$y^2 + 6y = 4x - 1$$

$$y^2 + 6y + 9 = 4x - 1 + 9$$

$$(y + 3)^2 = 4(x + 2).$$

Vrchol paraboly tedy je $V = [m; n] = [-2; -3]$, osa paraboly je rovnoběžná s osou x , $p = 2$,

$$F = \left[m + \frac{p}{2}; n \right] = [-1; -3].$$

Neřešené úlohy:

- 1) Napište rovnici kružnice, která má střed v počátku a prochází bodem **a)** $A = [-3; 4]$
b) $B = [-12; 5]$.
- 2) Napište rovnici kružnice, která má střed $S = [2; 3]$ a prochází bodem $M = [-1; 7]$.
- 3) Zjistěte, zda dané rovnice jsou rovnicemi kružnice, pokud ano, najděte středy a poloměry
a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ **b)** $3x^2 + 3y^2 + 8x - 6 = 0$ **c)** $x^2 + y^2 + x = 0$ **d)** $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$
- 4) Napište rovnici kružnice, která prochází body $A = [5; 1]$; $B = [0; 6]$; $C = [4; -2]$.
- 5) Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu v ose x a vedlejší osu v ose y , je-li dáno
a) $a = 5; b = 3$ **b)** $a = 13; e = 12$ **c)** $a + b = 9; e = 3$.
- 6) Zjistěte poloosy elipsy **a)** $16x^2 + 25y^2 = 400$ **b)** $4x^2 + 9y^2 = 36$ **c)** $x^2 + 4y^2 = 16$.
- 7) Zjistěte, zda jde o elipsu, pokud ano, udejte střed, polohu os a poloosy:
a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$ **b)** $4x^2 + 25y^2 - 24x + 100y + 139 = 0$
c) $7x^2 + 5y^2 - 28x + 38 = 0$ **d)** $9x^2 + y^2 + 9x - 4y = 0$ **e)** $9x^2 + 4y^2 - 36x + 72y + 360 = 0$.
- 8) Najděte rovnici hyperboly o středu $S = [0; 0]$, je-li
a) $a = 8; b = 4$ **b)** $a = 4; e = 5$ **c)** $b = 3; e = 5$.
- 9) Zjistěte, zda jde o hyperbolu, pokud ano, udejte střed, polohu os a poloosy:
a) $-9x^2 + 16y^2 + 90x + 64y - 305 = 0$ **b)** $x^2 - y^2 + 6x - 8y - 107 = 0$
c) $9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y + 32 = 0$.
- 10) Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a ohnisko v bodě
a) $F = \left[\frac{3}{2}; 0\right]$ **b)** $F = [-3; 0]$ **c)** $F = [0; -1]$.
- 11) Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a prochází bodem $A = [2; 6]$.
- 12) Určete vrchol a ohnisko paraboly **a)** $y^2 - 7x - 6y - 19 = 0$ **b)** $x^2 - 8x - 3y + 10 = 0$
c) $x^2 - 10x - 9y + 61 = 0$.

Výsledky:

- 1) **a)** $x^2 + y^2 = 25$ **b)** $x^2 + y^2 = 169$ **2)** $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$ **3) a)** $S = [1; -2]; r = 3$
b) $S = \left[-\frac{4}{3}; 0\right]; r = \frac{1}{3}\sqrt{34}$ **c)** $S = \left[-\frac{1}{2}; 0\right]; r = \frac{1}{2}$ **d)** není rovnicí kružnice
- 4) $x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0$ **5) a)** $9x^2 + 25y^2 = 225$ **b)** $25x^2 + 169y^2 = 4225$ **c)** $16x^2 + 25y^2 = 400$
- 6) **a)** $a = 5; b = 4$ **b)** $a = 3; b = 2$ **c)** $a = 4; b = 2$ **7) a)** $S = [3; 2]; a = 5; b = 6$; hlavní osa rovnoběžná s x **b)** není elipsa **c)** není elipsa **d)** $S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right]; a = \frac{5}{2}; b = \frac{5}{6}$; hlavní osa rovnoběžná s y **e)** pouze bod $[2; -9]$.
- 8) **a)** $x^2 - 4y^2 = 64$ **b)** $9x^2 - 16y^2 = 144$ **c)** $9x^2 - 16y^2 = 144$ **9) a)** $S = [5; -2]; a = 3; b = 4$; hlavní osa rovnoběžná s y **b)** $S = [-3; -4]; a = b = 10$; hlavní osa rovnoběžná s x **c)** není hyperbola **10) a)** $y^2 = 6x$ **b)** $y^2 = -12x$ **c)** $x^2 = -4y$ **11) a)** $x^2 = \frac{2}{3}y$; $y^2 = 18x$ **12) a)** $V = [-4; 3]; F = \left[-\frac{4}{9}; 3\right]$
b) $V = [4; -2]; F = \left[4; -\frac{5}{4}\right]$ **c)** $V = [5; 4]; F = \left[5; \frac{25}{4}\right]$.

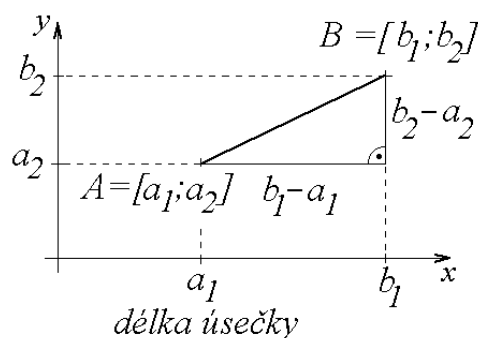
7 Analytická geometrie v rovině

Myslím, tedy jsem.

(René Descartes)

7.1 Úsečka

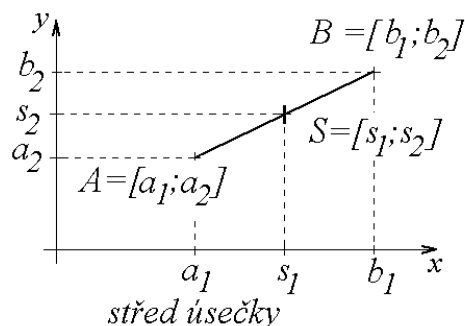
V kapitole 5.1 jsme zavedli pojem souřadnice v rovině pro potřeby konstrukce grafů funkcí. Pomocí souřadnic lze ovšem popisovat i geometrické útvary. Tuto metodu použil poprvé francouzský matematik a filozof René Descartes, který je považován za zakladatele analytické geometrie. Tato matematická disciplína popisuje geometrické útvary pomocí aparátu aritmetiky a algebry právě prostřednictvím souřadnic.



Délka úsečky AB (vzdálenost bodů A, B): Je-li $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, pak

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Střed úsečky AB, kde $A = [a_1; a_2]$; $B = [b_1; b_2]$ je bod $S = [s_1; s_2] \in AB$ takový, že $|SA| = |SB|$:



$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}; s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

Příklad 1.: Jsou dány body $A = [-4; -2]$, $B = [-3; 5]$. Určete bod C tak, aby ležel na ose y a $\triangle ABC$ byl rovnoramenný trojúhelník se základnou AB .

Řešení: Hledané souřadnice označme $C = [c_1; c_2]$. Má-li být $C \in y$, musí být $c_1 = 0$, tedy $C = [0; c_2]$. Má-li být dále $|AC| = |BC|$, dostáváme:

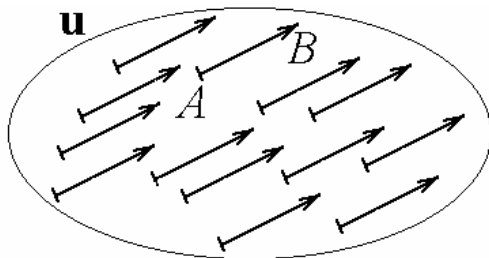
$$\begin{aligned} \sqrt{(-4)^2 + (c_2 + 2)^2} &= \sqrt{3^2 + (c_2 - 5)^2} / ()^2 \\ 16 + c_2^2 + 4c_2 + 4 &= 9 + c_2^2 - 10c_2 + 25 \\ 14c_2 &= 14 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že jsme skutečně našli kořen rovnice, hledaný bod má tedy souřadnice $C = [0; 1]$.

7.2 Vektory v rovině

V kpt. 6.8 jsme zavedli pojem orientované úsečky, na který nyní navážeme.

Vektor: je množina všech shodných souhlasně orientovaných úseček. Označujeme ho buď tučně $\mathbf{u}$ nebo (spíše v ručně psaném textu) šipkou $\vec{u}$.



vektor a jeho umístění

množiny). Připouštíme i tzv. nulový vektor jako množinu všech úseček „nulové“ délky, tj. $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$.

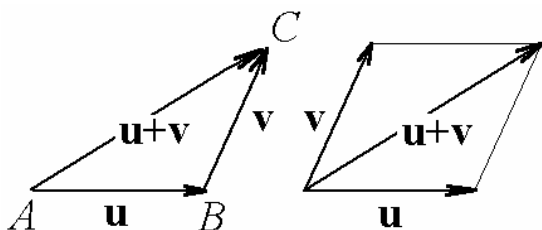
Velikost (délka) vektoru: velikostí (délkou) vektoru $\mathbf{u}$ rozumíme velikost (délku) jeho libovolného reprezentanta. Značíme $|\mathbf{u}|$. Vektor, jehož velikost je rovna jedné, nazýváme jednotkový vektor.

Součet bodu a vektoru: Umístíme vektor $\mathbf{u}$ do bodu A a koncový bod tohoto umístění označme B . Bod B nazýváme součtem bodu A a vektoru $\mathbf{u}$, značíme $B = A + \mathbf{u}$. Vektor $\mathbf{u}$ nazýváme rozdílem bodů $B; A$ (v tomto pořadí), značíme $\mathbf{u} = B - A$.

Násobení vektoru reálným číslem (skalárem): Nechť $k \in \mathbb{R}$ je libovolné reálné číslo, $\mathbf{u}$ libovolný vektor. Součinem čísla k a vektoru $\mathbf{u}$ rozumíme vektor $k \cdot \mathbf{u}$, rovnoběžný souhlasně (pro $k > 0$) resp. nesouhlasně (pro $k < 0$) s vektorem $\mathbf{u}$. Velikost tohoto vektoru je $|k| \cdot |\mathbf{u}|$. Speciálně: je-li $k = -1$, je $k \cdot \mathbf{u} = -1 \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$. Tento vektor nazýváme vektorem opačným k vektoru $\mathbf{u}$.

O souhlasně, popř. nesouhlasně rovnoběžných vektorech říkáme, že

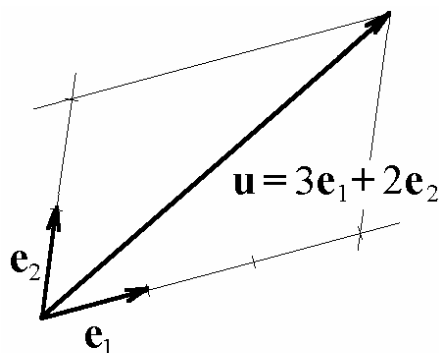
- jsou kolineární
- leží v jedné přímce (je-li totiž $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$; $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$; $\mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$, pak body A, B, C leží na téže přímce)



součet vektorů

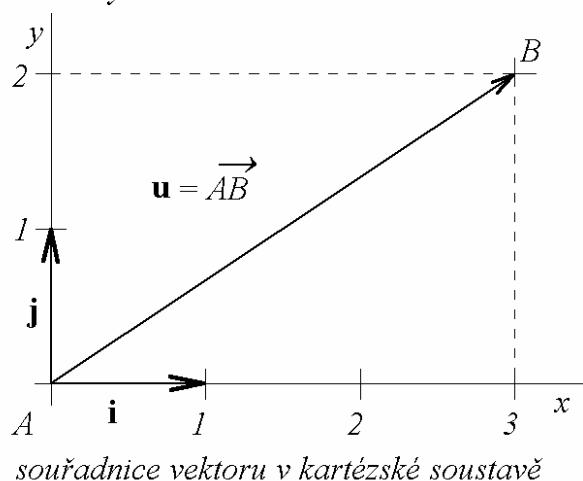
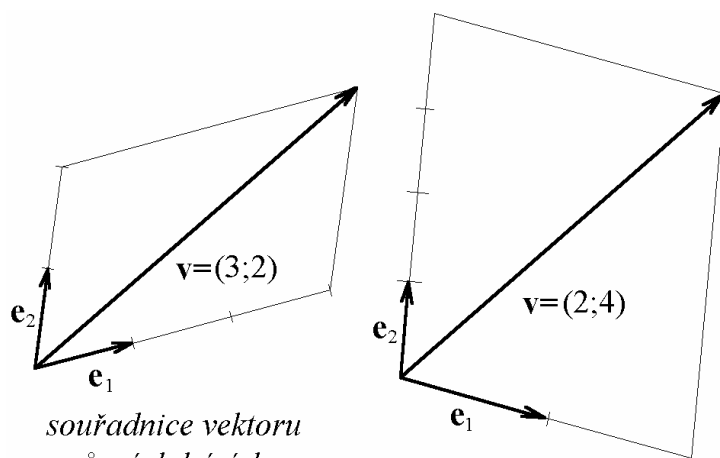
Součet dvou vektorů: Nechť $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$ jsou dva libovolné vektory; $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$. Umístíme vektor $\mathbf{v}$ do bodu B , koncový bod tohoto umístění označme C , tj. $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$. Součtem vektorů $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$ rozumíme vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$.

Tuto definici součtu vektorů znázorňuje připojený obrázek vlevo. Při konstrukci součtu dvou vektorů se často používá tzv. doplnění na rovnoběžník (viz obrázek vpravo).



lineární kombinace

Mějme dva nekolineární vektory $\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2$, tj. dva nenulové vektory, které neleží v jedné přímce. Pak každý vektor $\mathbf{u}$ v rovině lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$, kde $u_1; u_2 \in \mathbb{R}$. Říkáme, že jsme vektor $\mathbf{u}$ zapsali ve tvaru **lineární kombinace** vektorů $\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2$. Uspořádanou dvojici vektorů $[\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2]$, nazýváme **bází**, vektory $\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2$ **bázové**



vektory, čísla $u_1; u_2 \in \mathbb{R}$ nazýváme **souřadnice vektoru u** v bázi $[e_1; e_2]$. Píšeme pak $u = (u_1; u_2)$.

Dvojici navzájem kolmých vektorů nazýváme **ortogonální bázi**, jsou-li navíc oba tyto vektory jednotkové, hovoříme o **ortonormální bázi**. Složky ortonormální báze značíme většinou **i, j**. Dále budeme pracovat výhradně s touto ortonormální bází.

Uvedme nyní do souvislosti takto zavedené souřadnice vektoru v ortonormální bázi s kartézskými souřadnicemi, které jsme zavedli v kpt. 5.1. a se kterými jsme pracovali rovněž v kpt. 5.1. Je-li rovina opatřena kartézskou souřadnou soustavou $\langle O, x, y \rangle$, lze zvolit ortonormální bázi $[i, j]$, kde bázevé vektory jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Umístíme libovolný vektor do počátku. Jeho souřadnice jsou rovny kartézským souřadnicím koncového bodu tohoto umístění. Pak je např: $i = (1; 0)$; $j = (0; 1)$. Je-li $u = \overrightarrow{AB}$; $A = [0; 0]$;

$B = [3; 2]$, je $u = (3; 2)$. Je-li obecně $A = [a_1; a_2]$; $B = [b_1; b_2]$; $C = [c_1; c_2]$; $u = (u_1; u_2)$; $v = (v_1; v_2)$; $u = \overrightarrow{AB}$, je:

$$\begin{aligned} u &= B - A = [b_1; b_2] - [a_1; a_2] = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (u_1; u_2) \\ v &= (v_1; v_2) = v_1 \cdot i + v_2 \cdot j \\ |v| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ k \cdot u &= k \cdot (u_1; u_2) = (ku_1; ku_2) \\ -u &= -(u_1; u_2) = (-u_1; -u_2) \\ u + v &= (u_1; u_2) + (v_1; v_2) = (u_1 + v_1; u_2 + v_2) \\ C + u &= [c_1; c_2] + (u_1; u_2) = [c_1 + u_1; c_2 + u_2] \end{aligned}$$

1. Příklad: Je dáno $k = 2$; $v = (3; 5)$. Určeme vektor $u = k \cdot v$.

Řešení: $u = k \cdot v = 2 \cdot v = 2 \cdot (3; 5) = (2 \cdot 3; 2 \cdot 5) = (6; 10)$.

2. Příklad: Určeme souřadnice vektoru $u = \overrightarrow{AB}$, kde $A = [3; 7]$; $B = [-1; 2]$.

Řešení: $u = B - A = (-1 - 3; 2 - 7) = (-4; -5)$.

3. Příklad: Zjistíme, zda body $A = [-2; 10]$; $B = [7; 3]$; $C = [1; 5]$ leží na jedné přímce.

Řešení: Položme $u = \overrightarrow{AB} = B - A = (7 + 2; 3 - 10) = (9; -7)$;

$v = \overrightarrow{AC} = C - A = (1 + 2; 5 - 10) = (3; -5)$

Protože vektor $\mathbf{v}$ není násobkem vektoru $\mathbf{u}$, body A, B, C neleží na jedné přímce.

4. Příklad: Určeme součet a rozdíl vektorů $\mathbf{u} = (3; -2)$; $\mathbf{v} = (1; 8)$.

Řešení: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3; -2) + (1; 8) = (3+1; -2+8) = (4; 6)$,
 $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (3; -2) - (1; 8) = (3-1; -2-8) = (2; -10)$.

5. Příklad: Určeme souřadnice těžiště trojúhelníka ABC , je-li $A = [1; 2]$; $B = [3; 1]$; $C = [5; 3]$.

Řešení: Těžiště T leží např. na těžnici $t_a = AS_a$, kde S_a je střed úsečky BC . Je tedy

$$S_a = \left[\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2} \right] = \left[\frac{3+5}{2}; \frac{1+3}{2} \right] = [4; 2],$$

$$\overrightarrow{AS_a} = S_a - A = (4-1; 2-2) = (3; 0).$$

Těžiště T rozdělí těžnici AS_a tak, že $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AS_a} = \frac{2}{3} \cdot (3; 0) = (2; 0)$. Protože $\overrightarrow{AT} = T - A$,
je $T = A + \overrightarrow{AT} = [1; 2] + (2; 0) = [3; 2]$.

Řešme příklad 5 obecně pro vrcholy $A = [a_1; a_2]$; $B = [b_1; b_2]$; $C = [c_1; c_2]$:

$$S_a = \left[\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2} \right]$$

$$\overrightarrow{AS_a} = S_a - A = \left(\frac{b_1 + c_1}{2} - a_1; \frac{b_2 + c_2}{2} - a_2 \right) = \left(\frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{2}; \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AS_a} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{2}; \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{2} \right) = \left(\frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{3}; \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{3} \right)$$

$$T = A + \overrightarrow{AT} = [a_1; a_2] + \left(\frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{3}; \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{3} \right) = \left[a_1 + \frac{b_1 + c_1 - 2a_1}{3}; a_2 + \frac{b_2 + c_2 - 2a_2}{3} \right] =$$

$$= \left[\frac{3a_1 + b_1 + c_1 - 2a_1}{3}; \frac{3a_2 + b_2 + c_2 - 2a_2}{3} \right] = \left[\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right].$$

Úhel dvou vektorů: Úhlem dvou nenulových vektorů rozumíme úhel, který svírají jejich reprezentanti. Úhel vektorů, z nichž alespoň jeden je nulový, se nedefinuje.

Skalární součin: Skalárním součinem dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$ rozumíme číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, pro které je

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos j} ;$$

kde j je úhel vektorů $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$. Skalární součin vektorů $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$, z nichž alespoň jeden je nulový, je roven nule.

Vlastnosti skalárního součinu:

$$(k \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = |k \cdot \mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos j = k \cdot (|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos j) = k \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$

Jsou-li vektory $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$ kolineární, je $j = 0 \Rightarrow \cos j = 1 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos j = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Speciálně $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|^2$.

Jsou-li vektory $\mathbf{u}; \mathbf{v}$ ortogonální, je $j = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos j = 0 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos j = 0$.

Je-li $\mathbf{u} = (u_1; u_2) = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = (v_1; v_2) = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$, je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1; u_2) \cdot (v_1; v_2) = (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}) = u_1 v_1 \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + u_2 v_1 \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_1 v_2 \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + u_2 v_2 \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}.$$

Vektory $\mathbf{i}; \mathbf{j}$ jsou ortogonální, je tedy $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$. Protože $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}|^2 = 1$; $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{j}|^2 = 1$, je

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2}.$$

Známe-li souřadnice vektorů, můžeme snadno zjistit jejich úhel: je-li $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$; $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$, je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos j \Rightarrow \cos j = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} \Rightarrow \boxed{\cos j = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}}.$$

6. Příklad: Určeme vektor $\mathbf{v}$, který má velikost $|\mathbf{v}| = 5$ a je kolmý k vektoru $\mathbf{u} = (16; 12)$.

Řešení: Skalární součin dvou kolmých vektorů je roven nule: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$. Ze zadané velikosti hledaného vektoru je: $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 5$. Pro neznámé souřadnice $v_1; v_2$ vektoru $\mathbf{v}$ tak máme soustavu dvou rovnic:

$$\begin{aligned} u_1 v_1 + u_2 v_2 &= 0 \\ \sqrt{v_1^2 + v_2^2} &= 5 \end{aligned}$$

Do první rovnice dosadíme známé souřadnice vektoru $\mathbf{u} = (16; 12)$:

$$16v_1 + 12v_2 = 0,$$

$$\text{vyjádříme např. } v_1: \quad v_1 = -\frac{12v_2}{16} = -\frac{3v_2}{4}$$

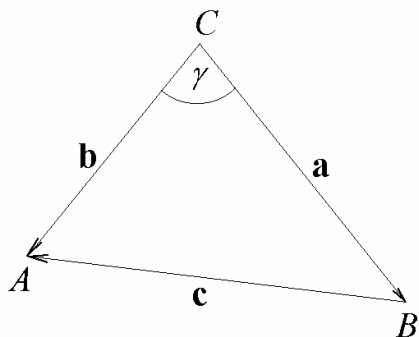
a dosadíme do druhé rovnice pro velikost vektoru:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(-\frac{3v_2}{4}\right)^2 + v_2^2} &= 5 \\ \frac{9 \cdot v_2^2}{16} + v_2^2 &= 25 \\ \frac{9 \cdot v_2^2 + 16 \cdot v_2^2}{16} &= 25 \\ \frac{25 \cdot v_2^2}{16} &= 25 \\ v_2^2 &= 16 \\ v_2 &= \pm 4 \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnic pro skalární součin je:

$$16v_1 + 12 \cdot (\pm 4) = 0 \Rightarrow 16v_1 \boxed{\pm} 48 = 0 \Rightarrow 16v_1 = \boxed{\mp} 48 \Rightarrow v_1 = \mp 3.$$

V tomto zápisu jsou skryty dvě rovnice (jedna pro $v_2 = +4$, druhá pro $v_2 = -4$). Všimněte si přehození znaménka (v rámečku) při převodu z jedné strany rovnice na druhou. Úloha má **dvě řešení**: $\mathbf{v}_1 = (4; -3)$; $\mathbf{v}_2 = (-4; 3)$ (při zápisu řešení je třeba brát současně vždy jen horní nebo jen dolní znaménka).



7. Příklad: Dokažme kosinovou větu užitím skalárního součinu vektorů

Řešení: V kpt. 6.6. jsme dokazovali kosinovou větu „synteticky“ (bez použití souřadnic). Chápeme-li strany trojúhelníka jako vektory, je důkaz velmi jednoduchý:

$$c^2 = c^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 = \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}^2 = b^2 - 2ab \cos g + a^2$$

Neřešené úlohy:

- 1) V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ je $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{u}$; $\mathbf{E} - \mathbf{A} = \mathbf{v}$. Pomocí $\mathbf{u}; \mathbf{v}$ vyjádřete
a) $\mathbf{D} - \mathbf{C}$ b) $\mathbf{E} - \mathbf{D}$ c) $\mathbf{F} - \mathbf{E}$ d) $\mathbf{A} - \mathbf{F}$ e) $\mathbf{C} - \mathbf{A}$.
- 2) Určete $l; m; n$ tak, aby vektory $\mathbf{x}; \mathbf{y}$ byly kolinéární (rovnoběžné):
a) $\mathbf{x} = 3\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$; $\mathbf{y} = \mathbf{u} + m\mathbf{v} + n\mathbf{w}$ b) $\mathbf{x} = -2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + m\mathbf{w}$; $\mathbf{y} = l\mathbf{u} - 6\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$.
- 3) Vektory $\mathbf{u}; \mathbf{v}$ svírají úhel $j = \frac{p}{6}$ a mají velikosti $|\mathbf{u}| = \sqrt{3}; |\mathbf{v}| = 1$. Vypočtěte velikosti a úhel vektorů $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.
- 4) Určete úhel vektorů $\mathbf{u}; \mathbf{v}$; jestliže $|\mathbf{u}| = 5; |\mathbf{v}| = 8; |\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 7$.
- 5) Vypočtěte $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$, když $|\mathbf{u}| = 13; |\mathbf{v}| = 19; |\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 24$.
- 6) Vypočtěte obsah a velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$, je-li
a) $A = [0; 0]; B = [7; 1]; C = [2; 6]$ b) $A = [2; 5]; B = [-4; 2]; C = [9; -3]$.
- 7) Určete úhel úhlopříček čtyřúhelníka $ABCD$, je-li
 $A = [5; 2]; B = [-1; 6]; C = [-3; -2]; D = [2; -5]$.
- 8) Vypočtěte velikosti výšek $\triangle ABC$, je-li
a) $A = [5; 2]; B = [1; 5]; C = [-2; 1]$ b) $A = [7; 8]; B = [5; -2]; C = [-3; -6]$.

Výsledky

- 1 a) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ b) $-\mathbf{u}$ c) $-\mathbf{v}$ d) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ e) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 2) a) $m = -\frac{1}{3}; n = \frac{1}{3}$ b) $l = 4; m = -1$
- 3) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{7}$; $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 1$; $j = 40^\circ 54'$ 4) $j = 60^\circ$ 5) 22 6) a) $S = 20$; $a = g = 63^\circ 26'$; $b = 53^\circ 08'$ b) $S = \frac{69}{2}$; $a = 104^\circ 37'$; $b = 47^\circ 36'$; $g = 27^\circ 47'$ 7) $w = 84^\circ 42'$ 8) a) $5; 5; \frac{5}{2}\sqrt{2}$ b) $\frac{18}{5}\sqrt{5}; \frac{18}{37}\sqrt{74}; \frac{18}{13}\sqrt{26}$

7.3 Přímka v rovině

Pomocí souřadnic bodů můžeme číselně charakterizovat různé geometrické útvary. Např. pro souřadnice každého bodu $L = [x; y]$ v 1. kvadrantu platí $x \geq 0; y \geq 0$. Říkáme, že tyto nerovnosti **charakterizují** 1. kvadrant, resp. že jsou jeho **analytickým vyjádřením**. Podobně analytickým vyjádřením přímky rozumíme každý předpis, kterému vyhovují souřadnice libovolného bodu této přímky a žádné jiné.

Uvažujme nyní libovolnou přímku p . Zvolme libovolný bod $A \in p$ a libovolný nenulový vektor $\mathbf{u}$ rovnoběžný s přímkou p . Pro libovolný bod přímky X přímky p označme $\mathbf{v} = X - A$. Vektory $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$ jsou rovnoběžné, vektor $\mathbf{v}$ je tedy násobkem vektoru $\mathbf{u}$, tj. existuje reálné číslo t takové, že $\mathbf{v} = t \cdot \mathbf{u}$. Je tedy

$$\mathbf{v} = t \cdot \mathbf{u} \stackrel{\mathbf{v} = X - A}{\Rightarrow} X - A = t \cdot \mathbf{u} \Rightarrow \boxed{X = A + t \cdot \mathbf{u}}; t \in \mathbb{R}.$$

Poslední rovnici (v rámečku) nazýváme **parametrickou rovnicí přímky**. Číslo t nazýváme **parametr** bodu X . Probíhá-li parametr všechna reálná čísla, probíhá příslušný bod X celou přímkou p .

Geometrický význam parametru t : Uvažujme reprezentanta vektoru $\mathbf{u}$ s počátkem v bodě A , koncový bod tohoto reprezentanta označme B .

- 1) Bod X má od bodu A vzdálenost $|AX| = |t| \cdot |\mathbf{u}| = |t| \cdot |AB|$. Je-li tedy speciálně vektor $\mathbf{u}$ jednotkový, tj. $|\mathbf{u}| = |AB| = 1$, je $t = 1$.
- 2) Je-li $t \geq 0$, pak bod X leží na polopřímce $\overrightarrow{AB}$. Speciálně pro $t = 1$ je $X \equiv B$, pro $t = 0$ je $X \equiv A$.
- 3) Je-li $t \leq 0$, pak bod X leží na polopřímce opačné k $\overrightarrow{AB}$. Speciálně pro $t = 0$ je opět $X \equiv A$.

Zapišme parametrickou rovnici $X = A + t \cdot \mathbf{u}$ v souřadnicích. Je-li $X = [x; y]$; $A = [a_1; a_2]$; $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$, dostáváme:

$$\begin{aligned} [x; y] &= [a_1; a_2] + t \cdot (u_1; u_2) \\ [x; y] &= [a_1; a_2] + (t \cdot u_1; t \cdot u_2) \\ [x; y] &= [a_1 + t \cdot u_1; a_2 + t \cdot u_2] \end{aligned}$$

Jestliže se však dle poslední rovnice mají rovnat dva body, musí se rovnat jejich souřadnice. Dostáváme tedy **dvojici parametrických rovnic**

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1 \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 \end{aligned}}; t \in \mathbb{R}.$$

1. Příklad: Jsou dány body $A = [1; 2]$; $B = [4; 8]$. Určete parametrické rovnice

a) přímky $\overleftrightarrow{AB}$ b) polopřímky $\overrightarrow{AB}$ c) úsečky AB d) polopřímky $\overrightarrow{BA}$.

Řešení: Ve všech případech budeme potřebovat směrový vektor. Můžeme položit $\mathbf{u} = B - A = (3; 6)$. Pak je $\overrightarrow{AB} \equiv X = A + t \cdot \mathbf{u}$; $t \in \mathbb{R}$; což rozepsáno do souřadnic je:

$$\text{a) } \vec{AB} \equiv x = 1 + 3 \cdot t ; t \in \mathbb{I} .$$

$$y = 2 + 6 \cdot t$$

b) Rovnice budou stejné, pouze podle výše uvedeného bodu 2) musí být $t \geq 0$, tedy

$$\vec{AB} \equiv x = 1 + 3 \cdot t ; t \geq 0 .$$

$$y = 2 + 6 \cdot t$$

c) Rovnice budou opět stejné. Opět podle bodu 2) musí být $t \geq 0$. Pro $t = 0$ je $X \equiv A$, s rostoucím parametrem se proměnný bod X vzdaluje od bodu A . Protože $\vec{u} = B - A$, je podle bodu 2) $X \equiv B$ pro $t = 1$. Je tedy

$$\vec{AB} \equiv x = 1 + 3 \cdot t ; t \in \langle 0; 1 \rangle$$

$$y = 2 + 6 \cdot t$$

d) Řešení případu b) svádí k závěru, že rovnice polopřímky $\vec{BA}$ budou

~~$$\vec{BA} \equiv x = 1 + 3 \cdot t ; t \leq 0$$~~
~~$$y = 2 + 6 \cdot t$$~~

To ovšem není správně, neboť se v tomto případě jedná o rovnici polopřímky opačné k polopřímce $\vec{AB}$, což samozřejmě není polopřímka $\vec{BA}$. Polopřímka $\vec{BA}$ má počátek v bodě B , musí tedy být

$$\vec{BA} \equiv x = 4 - 3 \cdot t ; t \geq 0$$

$$y = 8 - 6 \cdot t$$

Poznámka: Pokud jde o rovnici přímky, nezáleží ani na velikosti ani na orientaci směrového vektoru. Pro $t \in \mathbb{I}$ jsou rovnice

$$x = 1 + 3 \cdot t ; x = 1 + t ; x = 1 - t$$

$$y = 2 + 6 \cdot t ; y = 2 + 2t ; y = 2 - 2t$$

rovnícemi téže přímky. U polopřímky samozřejmě záleží na orientaci směrového vektoru - jestliže ji měníme, pak měníme polopřímku v polopřímku opačnou. Chceme-li vyjádřit tutéž polopřímku, musíme se změnou orientace směrového vektoru současně změnit znaménko parametru, např:

$$\vec{BA} \equiv x = 1 + 3 \cdot t ; t \leq 0$$

$$y = 2 + 6 \cdot t$$

$$\vec{BA} \equiv x = 4 + t ; t \leq 0$$

$$y = 8 + 2 \cdot t$$

$$\vec{BA} \equiv x = 4 - t ; t \geq 0$$

$$y = 8 - 2 \cdot t$$

Obecná rovnice přímky v rovině: Uvažujme přímku vyjádřenou obecně parametrickými rovnicemi

$$x = a_1 + t \cdot u_1 ; t \in \mathbb{I} .$$

$$y = a_2 + t \cdot u_2$$

Z této soustavy dvou lineárních rovnic vyloučíme parametr:

$$\begin{array}{r}
x = a_1 + t \cdot u_1 / \cdot u_2 \\
y = a_2 + t \cdot u_2 / \cdot (-u_1) \\
\hline
u_2 x = u_2 a_1 + t \cdot u_1 \cdot u_2 \\
-u_1 y = -u_1 a_2 - t \cdot u_2 \cdot u_1 \\
\hline
u_2 x - u_1 y = u_2 a_1 - u_1 a_2 \\
u_2 x - u_1 y - u_2 a_1 + u_1 a_2 = 0
\end{array}$$

Poslední rovnici většinou píšeme ve tvaru

$$\boxed{ax + by + c = 0}, \text{ kde } a, b, c \in \mathbb{R}$$

a nazýváme ji **obecnou rovnicí přímky v rovině**.

Z předchozí úpravy je zřejmé, že v tomto tvaru je $a = u_2$; $b = -u_1$. Je-li $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$ směrový vektor přímky a označíme-li $\mathbf{n} = (a; b) = (u_2; -u_1)$, je

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = (u_1; u_2) \cdot (u_2; -u_1) = u_1 u_2 - u_2 u_1 = 0$$

Vektory $\mathbf{n}; \mathbf{u}$ jsou tedy na sebe kolmé. Vektor $\mathbf{n} = (a; b)$ nazýváme **normálovým vektorem přímky**.

Převod parametrických rovnic na rovnici obecnou je v konkrétních případech většinou jednodušší:

1. Příklad: Napišme obecnou rovnici přímky zadané parametrickými rovnicemi:

$$\begin{array}{r}
x = -7 + 6t \\
y = 3 + 2t / \cdot 3 \\
\hline
x = -7 + 6t \\
-(3y = 9 + 6t) \\
\hline
x - 3y = -16 \\
x - 3y + 16 = 0
\end{array}$$

Lze také využít toho, že koeficienty a, b v obecné rovnici jsou souřadnicemi normálového vektoru: Je-li

$$p \equiv \begin{cases} x = -7 + 6t \\ y = 3 + 2t \end{cases},$$

pak směrový vektor je $\mathbf{s} = (6; 2)$ a normálový $\mathbf{n} = (2; -6)$. Obecná rovnice této přímky je tedy $2x - 6y + c = 0$. Koeficient c určíme z podmínky, že bod $A = [-7; 3]$ leží na hledané přímce a jeho souřadnice musí tedy obecné rovnici vyhovovat: $2 \cdot (-7) - 6 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = 32$. Hledaná rovnice je tedy $2x - 6y + 32 = 0$ (můžeme pak samozřejmě ještě vydělit dvěma).

2. Příklad: Napišme obecnou rovnici přímky, která prochází body $A = [3; 7]$; $B = [-2; 1]$.

Řešení:

a) Pomocí parametrických rovnic: Směrovým vektorem je vektor

$\mathbf{s} = B - A = (-2 - 3; 1 - 7) = (-5; -6)$ a přímka prochází např. bodem $A = [3; 7]$. Je tedy:

$$\begin{array}{r} x = 3 - 5t / \cdot 6 \\ y = 7 - 6t / \cdot (-5) \\ \hline 6x - 5y = -17 \\ 6x - 5y + 17 = 0 \end{array}$$

b) Pomocí normálového vektoru: Směrový vektor je $\mathbf{s} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (-5; -6)$, normálový tedy $\mathbf{n} = (6; -5)$. Připomeňme, že $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0$, proto je třeba zaměnit souřadnice a u jedné z nich změnit znaménko. Obecná rovnice je $6x - 5y + c = 0$ a protože např. $A \in p$, je $6 \cdot 3 - 5 \cdot 7 + c = 0 \Rightarrow c = 17$. Hledaná rovnice je tedy $6x - 5y + 17 = 0$.

Směrnice tvar rovnice přímky: Vyjádřeme z obecné rovnice $ax + by + c = 0$ proměnnou y :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Dostáváme tzv. **směrnice tvar rovnice přímky**. Tuto rovnici píšeme obvykle ve tvaru

$$\boxed{y = kx + q},$$

kde $k = \operatorname{tg} j$ je tzv. **směrnice přímky** (j je orientovaný úhel, který svírá přímka s kladnou poloosou x) a q je **úsek, který přímka vytíná na ose y** . Je-li přímka zadána dvěma body $A = [a_1; a_2]$; $B = [b_1; b_2]$, pak pro její směrnici platí:

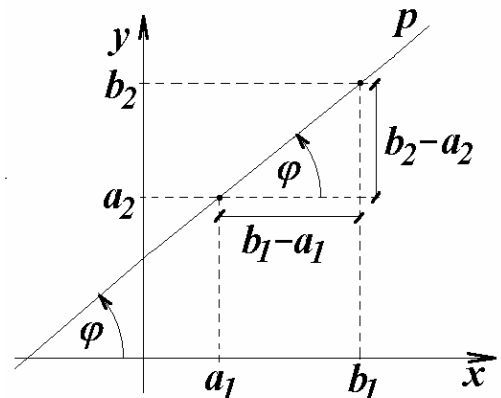
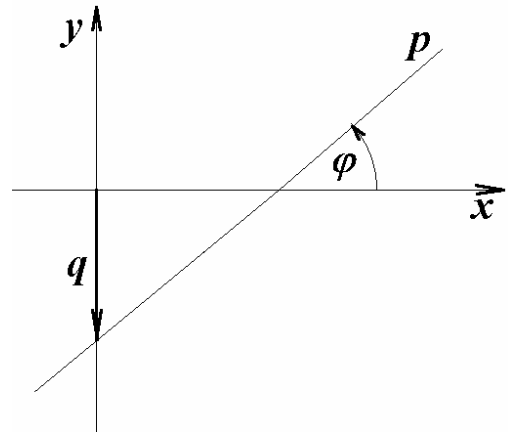
$$k = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}.$$

Má-li přímka rovnici $y = kx + q$ a prochází-li bodem o souřadnicích $[x_0; y_0]$, dostáváme po dosazení

$$y_0 = kx_0 + q \Rightarrow q = y_0 - kx_0,$$

tedy

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}.$$



3. Příklad: Napišme rovnici přímky, která prochází body $A = [3; 7]$; $B = [-2; 1]$.

Řešení: Podle výše uvedených vzorců je $k = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{1 - 7}{-2 - 3} = \frac{6}{5}$ a položíme-li např.

$A = [3; 7] = [x_0; y_0]$, dostáváme:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 7 = \frac{6}{5}(x - 3)$$

$$y = \frac{6}{5}x - 3 \cdot \frac{6}{5} + 7$$

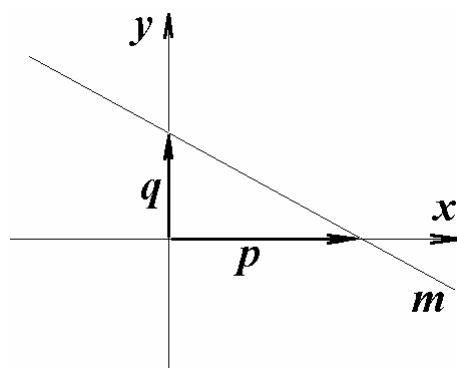
$$y = \frac{6}{5}x + \frac{17}{5} \quad (\text{směrnice tvar}) \Rightarrow 5y = 6x + 17 \Rightarrow 6x - 5y + 17 = 0 \quad (\text{obecný tvar}).$$

Úsekový tvar rovnice přímky: Obecnou rovnici přímky $ax + by + c = 0$, kde $c \neq 0$, lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ ax + by &= -c / : (-c) \\ \frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} &= 1 \end{aligned}$$

Pro $a, b \neq 0$ lze položit $-\frac{c}{a} = p$; $-\frac{c}{b} = q$ a dostáváme tzv. úsekový tvar rovnice přímky:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}.$$



Čísla p, q jsou úseky, které přímka vytíná na souřadných osách.

4. Příklad: Napišme obecnou rovnici přímky, která na ose x vytíná úsek $p = 3$ a na ose y úsek $q = -2$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} &= 1 \\ -2x + 3y &= -6 \\ 2x - 3y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

5. Příklad: Převed'me na úsekový tvar obecnou rovnici přímky :

$$3x - y + 4 = 0$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 3x - y + 4 &= 0 \\ 3x - y &= -4 \\ \frac{3x}{-4} - \frac{y}{-4} &= 1 \\ \frac{x}{-\frac{4}{3}} + \frac{y}{4} &= 1 \Rightarrow p = -\frac{4}{3}; q = 4 \end{aligned}$$

Vzdálenost bodu od přímky: Určení vzdálenosti bodu $X_0 = [x_0; y_0]$ od přímky $p \equiv ax + by + c = 0$ spočívá ve stanovení velikosti úsečky PX_0 , kde $P = [p_1; p_2]$ je pata kolmice spuštěné z bodu X_0 na přímku p . Vzhledem k tomu, že vektor $\mathbf{n}_p = (a; b)$ je normálovým vektorem přímky p , musí být současně směrovým vektorem přímky q , která je na přímku p kolmá. Je tedy $\mathbf{n}_p = (a; b) = \mathbf{s}_q$. Protože navíc $X_0 = [x_0; y_0] \in q$, je kolmice q určena parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} q \equiv x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

Vzdálenost v libovolného bodu $X = [x; y] \in q$ od bodu $X_0 = [x_0; y_0] \in q$ je pak

$$v = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \stackrel{[x; y] \in q}{=} \sqrt{(x_0 + at - x_0)^2 + (y_0 + bt - y_0)^2} = \sqrt{a^2 t^2 + b^2 t^2} = |t| \sqrt{a^2 + b^2}$$

Je-li $X \equiv P$ (tj. $X \in p \cap q$), musí tento bod splňovat současně rovnice přímek $p; q$ a pro hodnotu parametru t tak máme:

$$\begin{aligned} a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c &= 0 \\ ax_0 + a^2 t + by_0 + b^2 t + c &= 0 \\ (a^2 + b^2)t &= -ax_0 - by_0 - c \\ t &= -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Dosazením do výše uvedeného vztahu pro vzdálenost dostaneme:

$$v = \left| t \sqrt{a^2 + b^2} \right| = \left| -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} \right| = \frac{|-(ax_0 + by_0 + c)| \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pro vzdálenost v bodu $X_0 = [x_0; y_0]$ od přímky $p \equiv ax + by + c = 0$ tedy platí

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

6) Příklad: Určeme výšku v_a v $\triangle ABC$, je-li $A = [2; 1]; B = [6; -1]; C = [4; 5]$.

Řešení: Hledaná výška je vzdálenost vrcholu A od přímky $p \equiv \overleftrightarrow{BC}$. Směrový vektor této přímky je např. $\overrightarrow{BC} = C - B = (4 - 6; 5 + 1) = (-2; 6)$ a protože $B \in p$, je

$$p \equiv x = 6 - 2t$$

$$y = -2 + 6t$$

Vyloučením parametru dostaneme obecnou rovnici tvaru $p \equiv 3x + y - 16 = 0$, a tedy

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 16|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{10}.$$

Neřešené úlohy:

1) Napište parametrické rovnice přímky určené bodem A a vektorem u :

a) $A = [7; -1]; u = (3; -4)$ b) $A = [-2; -3]; u = (0; 4)$ c) $A = [0; 3]; u = (-7; 0)$

d) $A = [0; 0]; u = (1; 0)$.

2) Jsou dány body $A = [5; 2]; B = [3; 7]; C = [-4; 9]$. Napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem A rovnoběžně s přímkou určenou body B, C .

3) Zjistěte, zda dané body leží na přímce $x = 1 - t; y = 3t$:

a) $A = [3; -7]$ b) $B = [0; 3]$ c) $C = [-5; 18]$ d) $D = [-14; -1]$.

4) Zjistěte vzájemnou polohu daných přímek. Jestliže se protínají, najděte jejich průsečík:

a) $x = 7 - 2s; y = 3 + s$ a $x = 4 - t; y = 3t$ b) $x = 5 - 3s; y = -3 + s$ a $x = 20 + 9t; y = -8 - 3t$.

5) Najděte obecné rovnice přímek:

a) $x = -7 + 6t; y = 3 + 2t$ b) $x = 3t; y = 1 - 2t$ c) $x = 4 - 3t; y = t$.

6) Rozhodněte, zda body $A = [-3; 1]; B = [7; 2]; C = [0; 5]$ leží na přímce $4x - 3y + 15 = 0$.

7) Jaké podmínky musí splňovat koeficienty a, b, c , aby přímka $ax + by + c = 0$

a) byla rovnoběžná s osou x a nesplynula s ní?

b) byla osou x ?

c) byla rovnoběžná s osou y a nesplynula s ní?

d) byla osou y ?

e) procházela počátkem?

8) Napište rovnici osy úsečky AB , je-li $A = [-3; 1]; B = [4; -3]$.

9) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází body:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = [-7; 8]; B = [3; -2] & \text{b) } M = \left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]; N = \left[7; \frac{2}{3}\right] \\ \text{c) } E = [3; 9]; F = [-3; 15] & \text{d) } G = [0; -3]; H = [15; -3] \end{array}$$

10) Na přímce $4x - 12y - 2 = 0$ najděte bod, který má od přímky $5x + 12y + 5 = 0$ vzdálenost $v = 3$.

Výsledky:

- 1) a) $x = -7 + 3t; y = 1 - 4t$ b) $x = -2; y = -3 + 4t$ c) $x = -7t; y = 3$ d) $x = t; y = 0$
 2) $x = 2 - 7t; y = 5 + 2t$ 3) a) ne b) ano c) ano d) ne 4) a) různoběžky, $P = \left[\frac{11}{5}; \frac{27}{5}\right]$
 b) splývající rovnoběžky 5) a) $x - 3y + 10 = 0$ b) $2x + 3y - 3 = 0$ c) $x + 3y - 4 = 0$ 6) A, C leží, B neleží 7) a) $a = 0; c \neq 0$ b) $a = c = 0$ c) $b = 0; c \neq 0$ d) $c = 0$ 8) $14x - 8y - 15 = 0$
 9) a) $x + y - 1 = 0$ b) $3x + 276y - 205 = 0$ c) $x - 3 = 0$ d) $y + 3 = 0$
 10) $M_1 = \left[4; \frac{7}{6}\right]; M_2 = \left[-\frac{14}{3}; -\frac{31}{18}\right]$.

7.4 Dvě přímky v rovině

Dvě přímky v rovině mohou mít následující vzájemné polohy:

- a) Přímky jsou různoběžné - mají společný právě jeden bod (průsečík).
 b) Přímky jsou rovnoběžné různé - nemají žádný společný bod.
 c) Přímky jsou splývající - mají nekonečně mnoho společných bodů.

1. Příklad: Určeme průsečík přímek:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{array}{l} x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{array} & \text{b) } \begin{array}{l} p \equiv x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \end{array} & \text{c) } \begin{array}{l} q \equiv x = 2 - s \\ y = -1 + s \end{array} \end{array}$$

Řešení:

a) Průsečík dvou přímek jako jejich společný bod musí vyhovovat oběma rovnicím, řešíme tedy soustavu dvou rovnic:

$$\begin{array}{r} x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \\ \hline 7x + 5 = 0 \end{array}$$

$$x = -\frac{5}{7}$$

Dosazením např. do první rovnice pak dostaneme $y = -\frac{1}{7}$. Průsečíkem je tedy

$$\text{bod } P = \left[-\frac{5}{7}; -\frac{1}{7}\right].$$

b) Opět řešíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{r} 3 + 2t = 2 - s \\ +(1 - t = -1 + s) \\ \hline 4 + t = 1 \\ t = -3 \\ s = 5 \end{array}$$

Dosazením do kterékoliv parametrické rovnice dostáváme $P = [-3; 4]$.

c) Parametrické vyjádření přímky q dosadíme do obecné rovnice přímky p :

$$\begin{array}{r} 7(6 - 2t) - 9(15t) + 2 = 0 \\ 42 - 14t - 135t + 2 = 0 \\ t = \frac{44}{149} \end{array}$$

Dosazením zjištěné hodnoty parametru do parametrických rovnic přímky q dostáváme

$$\begin{array}{l} x = 6 - 2t = 6 - 2 \cdot \frac{44}{149} = \frac{806}{149}; \\ y = 15t = 15 \cdot \frac{44}{149} = \frac{660}{149}, \text{ tedy} \\ P = \left[\frac{806}{149}; \frac{660}{149}\right]. \end{array}$$

2. Příklad: Ukažme, že dané přímky jsou rovnoběžné:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{array}{l} 2x+3y-1=0 \\ 4x+6y+5=0 \end{array} & \text{b) } \begin{array}{l} p \equiv x=2-t \\ y=1+t \end{array} & \text{c) } \begin{array}{l} q \equiv x=3-2s \\ y=4+2s \end{array} \end{array}$$

Řešení:

Pokusme se zopakovat řešení soustav z předchozího příkladu:

$$\begin{array}{lll} 2x+3y-1=0 \cdot (-2) & 2-t=3-2s & -2t+2(3+t)+1=0 \\ \text{a) } 4x+6y+5=0 & \text{b) } \frac{+(1+t=4+2s)}{3=7} & \text{c) } 7=0 \\ 7=0 & & \end{array}$$

Ani v jednom případě soustava nemá řešení. Soustavy jsme však vůbec řešit nemuseli, stačilo si všimnout normálových, resp. směrových vektorů daných přímek. V případě a) jsou normálové vektory $\mathbf{n}_a = (2, 3)$; $\mathbf{n}_b = (4, 6)$, normálové vektory a tedy i přímky samotné jsou rovnoběžné. V případě b) jsou směrové vektory $\mathbf{s}_a = (-1; 1)$; $\mathbf{s}_b = (-2; 2)$ opět rovnoběžné. V případě c) je normálový vektor první přímky $\mathbf{n}_a = (1; 2)$, směrový vektor druhé $\mathbf{s}_b = (-2; 1)$. Tyto vektory jsou navzájem kolmé, směrové vektory tedy musí být rovnoběžné.

3. Příklad: Určeme vzájemnou polohu přímek:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{array}{l} 2x+y-1=0 \\ 6x+3y-3=0 \end{array} & \text{b) } \begin{array}{l} p \equiv x=3+5t \\ y=1-t \end{array} & \text{c) } \begin{array}{l} q \equiv x=-2-10s \\ y=2+2s \end{array} \end{array}$$

Řešení:

a) Druhá rovnice je trojnásobkem rovnice první, soustava má tedy nekonečně mnoho řešení a přímky splývají.

$$\begin{array}{ll} \text{b) } & \text{c) } \\ \begin{array}{l} 3+5t=-2-10s \\ 1-t=2+2s \cdot 5 \\ \hline 3+5t=-2-10s \\ 5-5t=10+10s \\ \hline 8=8 \end{array} & \begin{array}{l} 2(1-t)+(3+2t)-5=0 \\ 2-2t+3+2t-5=0 \\ \hline 0=0 \end{array} \end{array}$$

Také v těchto dvou případech dostáváme nekonečně mnoho řešení – přímky splývají.

Jestliže jsou dvě přímky různoběžné, svírají spolu úhel, který nazýváme **odchylkou přímek**. Tato odchylka je rovna úhlu, který svírají směrové resp. normálové vektory těchto přímek. Úhel dvou vektorů vypočítáme dle kpt. 7.2. Pro přímky zadané obecnými rovnicemi $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ dostáváme pro jejich odchylku j vzorec

$$\cos j = \frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

Speciálně pro dvě navzájem kolmé přímky platí

$$a_1a_2+b_1b_2=0.$$

Jednoduchou úpravou tohoto vztahu obdržíme $\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = -1$. Tyto zlomky jsou však směrnici $k_1; k_2$ daných přímek (viz předchozí kapitolu). Pro kolmé přímky ve směrnicovém tvaru tedy platí $k_1 k_2 = -1$.

Neřešené úlohy:

1) Určete průsečík přímek (pokud existuje):

a) $6x - 5y + 25 = 0$; $x = -5 + 5t$; $y = -1 + 6t$ b) $3x - 7y + 29 = 0$; $x = 15 + 14t$; $y = 23 + 6t$

c) $2x - 5y + 6 = 0$; $8x + 15y + 10 = 0$ d) $2x + 2y - 7 = 0$; $9x + 9y - 14 = 0$.

2) Určete koeficient a tak, aby přímka $ax - 3ay + 5 = 0$ procházela průsečíkem přímek $3x + 2y - 6 = 0$; $5x - 7y + 2 = 0$.

3) Stanovte koeficient a tak, aby přímka $ax + 4y - 9 = 0$ byla kolmá k přímce $2x - 3y + 7 = 0$.

4) Napište rovnici přímky, která prochází bodem $B = [3; 5]$ kolmo k přímce $2x - 7y + 3 = 0$.

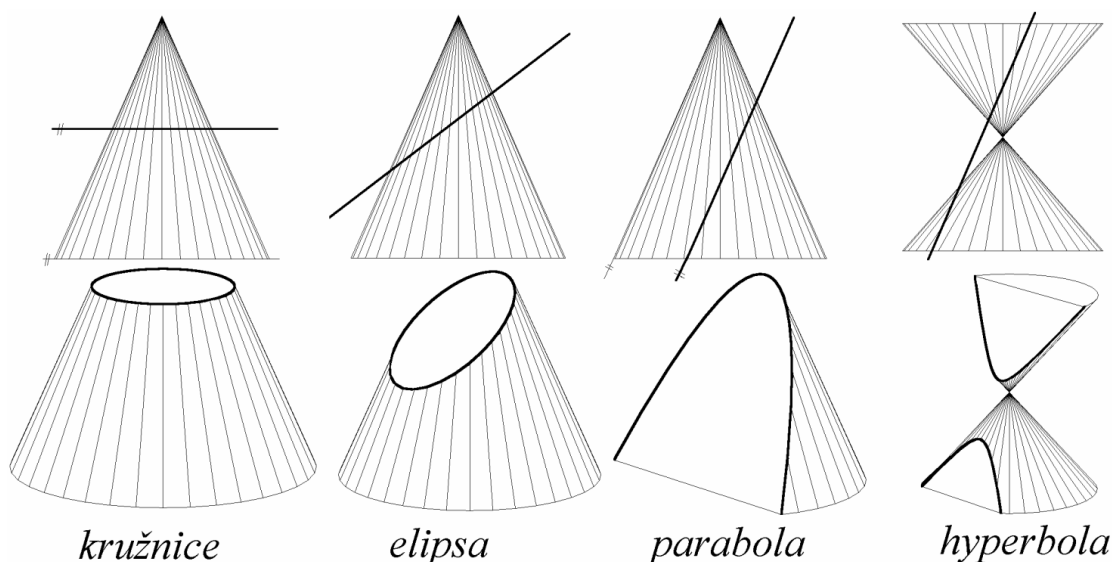
5) Vypočítejte odchylku přímek a) $2x - 3y + 4 = 0$; $x - y + 1 = 0$ b) $3x - 7 = 0$; $x + y + 13 = 0$.

Výsledky: 1) a) přímky splývají b) přímky rovnoběžné různé c) různoběžky, $P = \left[-2; \frac{2}{5}\right]$

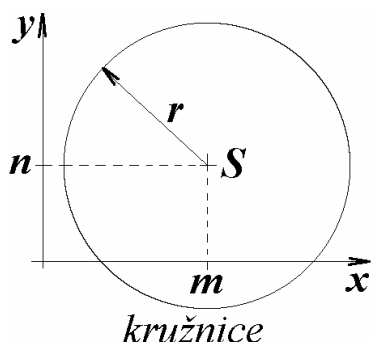
d) přímky rovnoběžné různé 2) $a = \frac{31}{14}$ 3) $a = 6$ 4) $7x + 2y - 31 = 0$ 5) a) $11^\circ 51' 11''$ b) 45° .

7.5 Kuželosečky

Sestrojíme řez rotační kuželové plochy rovinou r , která neprochází vrcholem kuželové plochy. Dostaneme křivku zvanou **kuželosečka**. Podle vzájemné polohy roviny r a kuželové plochy je to kružnice, elipsa, parabola nebo hyperbola. Jednotlivé případy zachycuje připojený obrázek.



Kružnice: je množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu (středu S) stálou vzdálenost (poloměr r). Kružnice, která má střed v bodě $S = [m; n]$, má tedy rovnici (tzv. středová rovnice)



$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2.$$

Pro střed v počátku je tedy speciálně $x^2 + y^2 = r^2$. Středovou rovnici lze roznásobením upravit na rovnici obecnou:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Kružnice je určena třemi svými body.

- 1. Příklad:** Určeme rovnici kružnice, je-li znám její střed a poloměr: **a)** $S = [0; -3]; r = \sqrt{2}$
b) $S = [-1; 1]; r = 1$.

Řešení: **a)** $(x-0)^2 + (y+3)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + (y+3)^2 = 2$ **b)** $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

- 2. Příklad:** Najděme střed a poloměr kružnice: **a)** $k \equiv x^2 + y^2 - 5x + 4y = 2$
b) $k \equiv x^2 + y^2 + 4x + 6y + 20 = 0$

Řešení: Rovnici kružnice doplníme na úplný čtverec:

a)

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 + 4y + 4 = 2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

b)

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 20 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = -20 + 4 + 9$$

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = -7$$

Tedy $S = [2.5; -2]; r = 3.5$.

Rovnice není rovnicí kružnice.

- 3. Příklad:** Najděme střed a poloměr kružnice, která prochází body $K = [5, 5]; L = [3, 1]; M = [0, 0]$.

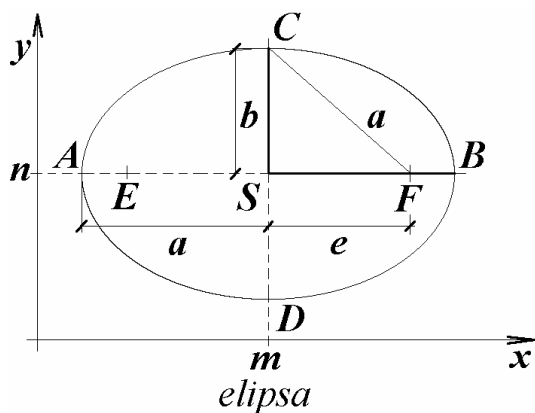
Řešení: Má-li kružnice procházet zadanými body, musí souřadnice těchto bodů vyhovovat rovnici kružnice. Dosazením např. do obecné rovnice $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ tak obdržíme pro neznámé koeficienty A, B, C soustavu tří rovnic:

$$\begin{array}{l} K \in k: 5^2 + 5^2 + 5A + 5B + C = 0 \\ L \in k: 3^2 + 1^2 + 3A + B + C = 0 \\ M \in k: 0^2 + 0^2 + 0A + 0B + C = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Z poslední rovnice je okamžitě } C = 0, \text{ je tedy} \\ \left. \begin{array}{l} 5A + 5B = -50 \\ 3A + B = -10 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0; B = -10.$$

Kružnice má tedy obecnou rovnici $x^2 + y^2 - 10y = 0$. Jejím doplněním na čtverec dostaneme $x^2 + y^2 - 10y + 25 = 25 \Rightarrow x^2 + (y-5)^2 = 25$. Je tedy $S = [0; 5]; r = 5$.

Elipsa: Je množina všech bodů v rovině, které mají od daných dvou bodů (ohnisek E, F) stálý součet vzdáleností ($2a$) – viz připojený obrázek na další straně.

Pro libovolný bod M elipsy tedy platí $|ME| + |MF| = 2a$. Spojnici libovolného bodu elipsy s ohniskem nazýváme **průvodič**. Střed S úsečky EF nazýváme **středem elipsy**. Body A, B jsou **hlavní vrcholy elipsy**, platí $|SA| = |SB| = a$, a je **hlavní poloosa**. C, D jsou **vedlejší**



vrcholy, platí $|SC|=|SD|=b$, b je **vedlejší poloosa**, $|ES|=|FS|=e$ – **výstřednost** (excentricita) elipsy. Dále je $a^2 = b^2 + e^2$, $|EC|=|FC|=|ED|=|FD|=a$. Elipsa se středem v bodě $S=[m;n]$, hlavní poloosou a rovnoběžnou s osou x a vedlejší poloosou b rovnoběžnou s osou y má rovnici (tzv. středová rovnice elipsy)

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Pro střed v počátku je tedy speciálně $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Platí $a \geq b > 0$. Je-li $a = b$, dostáváme speciálně kružnici se středem S a poloměrem $r = a = b$. Je-li hlavní poloosa a rovnoběžná s osou y , je $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$, resp. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Středovou rovnici lze roznásobením upravit na rovnici obecnou:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0; A > 0, B > 0,$$

kde pro $A = B$ se speciálně opět jedná o kružnici.

4. Příklad: Zjistíme, zda rovnice $3x^2 + 2y^2 + 6x - 5 = 0$ je rovnicí elipsy s osami rovnoběžnými se souřadnými osami. Je-li tomu tak, určíme střed a poloosy.

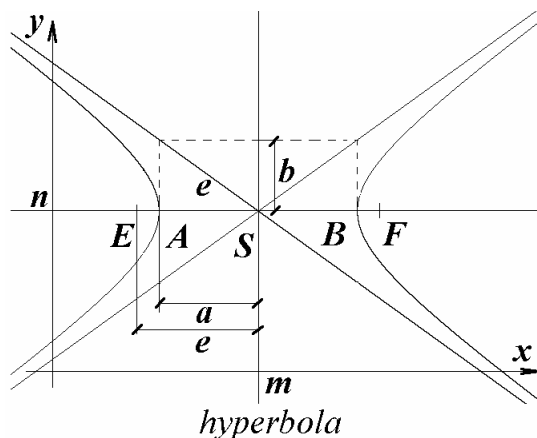
Řešení:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2y^2 + 6x - 5 &= 0 \\ 3 \cdot (x^2 + 2x) + 2y^2 + 6x &= 5 \\ 3 \cdot (x^2 + 2x + 1) + 2y^2 + 6x &= 5 + 3 \\ 3 \cdot (x+1)^2 + 2y^2 &= 8 : 8 \\ \frac{3 \cdot (x+1)^2}{8} + \frac{2y^2}{8} &= 1 \\ \frac{3 \cdot (x+1)^2}{\frac{8}{3}} + \frac{y^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Jedná se tedy o elipsu se středem $S = [-1; 0]$ a poloosami $b = \sqrt{4} = 2$; $a = \sqrt{\frac{8}{3}}$, hlavní osa je rovnoběžná s osou y .

Hyperbola: je množina všech bodů v rovině, které mají od daných dvou bodů (ohnisek E, F) stálou absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností ($2a$) – viz připojený obrázek.

Pro libovolný bod M hyperboly tedy platí $||ME| - |MF|| = 2a$. Spojnici libovolného bodu elipsy s ohniskem nazýváme **průvodič**. Střed S úsečky EF nazýváme **středem hyperboly**. Body A, B jsou **hlavní vrcholy hyperboly**, platí $|SA| = |SB| = a$, a je **hlavní poloosa**. C, D



jsou vedlejší vrcholy, platí $|SC|=|SD|=b$ b je **vedlejší poloosa**, $|ES|=|FS|=e$, e je **výstřednost** (excentricita) hyperboly. Dále je $e^2 = a^2 + b^2$. Hyperbola se středem v bodě $S=[m;n]$, hlavní poloosou a rovnoběžnou s osou x a vedlejší poloosou b rovnoběžnou s osou y má rovnici (tzv. středová rovnice hyperboly)

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Pro střed v počátku je tedy speciálně $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Je-li hlavní poloosa a rovnoběžná s osou y , je $-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$, resp. $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Přímký $a_1; a_2$ procházející středem hyperboly se směrnici $\pm \frac{b}{a}$ se nazývají asymptoty. Je-li $a=b$, nazýváme hyperbolu rovnoosou. Otočíme-li rovnoosou hyperbolu se středem v počátku okolo tohoto počátku o 45° , přejde její rovnice do tvaru $y = \frac{c}{x}$ – takto otočená rovnoosá hyperbola je grafem nepřímé úměrnosti.

Středovou rovnici hyperboly lze roznásobením upravit na rovnici obecnou:

$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0; A > 0, B > 0$$

pro hyperbolu s hlavní osou rovnoběžnou s osou x , resp.

$$-Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0; A > 0, B > 0$$

pro hyperbolu s hlavní osou rovnoběžnou s osou y .

5. Příklad: Zjistíme, zda rovnice $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$ je rovnicí hyperboly s osami rovnoběžnými se souřadnými osami. Je-li tomu tak, určíme její střed a poloosy.

Řešení:

$$9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$$

$$9 \cdot (x^2 - 4x) - 16 \cdot (y^2 - 2y) = 124$$

$$9 \cdot (x^2 - 4x + 4) - 16 \cdot (y^2 - 2y + 1) = 124 + 36 - 16$$

$$9 \cdot (x-2)^2 - 16 \cdot (y-1)^2 = 144 / :144$$

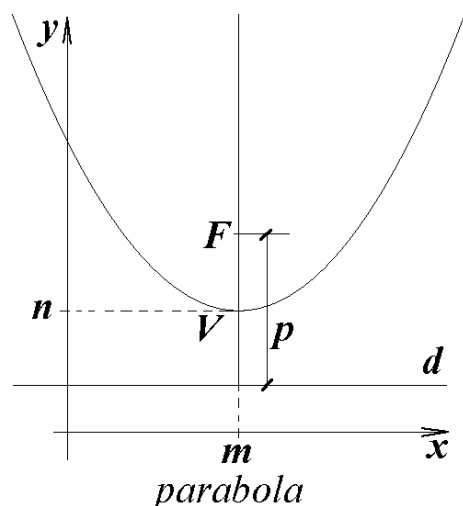
$$\frac{9 \cdot (x-2)^2}{144} - \frac{16 \cdot (y-1)^2}{144} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Jedná se tedy o hyperbolu se středem $S=[2;1]$ a poloosami $a=4; b=3$, její hlavní osa je rovnoběžná s osou x .

Parabola: je množina všech bodů v rovině, které mají od dané přímky (řídící přímka d) a daného bodu, který na této přímce neleží (ohnisko F), stejnou vzdálenost – viz připojený obrázek.

Kolmice spuštěná z ohniska na řídící přímku se nazývá **osa paraboly**, vzdálenost p ohniska od řídící přímky se nazývá **parametr paraboly**. Střed úsečky určené ohniskem a průsečíkem osy paraboly se řídící přímkou se nazývá vrchol paraboly. Parabola, jejíž vrchol má souřadnice $V = [m, n]$ a osa je rovnoběžná s osou x , má rovnici



$$(y - n)^2 = 2p(x - m) \Leftrightarrow F = \left[m + \frac{p}{2}; n \right];$$

$$(y - n)^2 = -2p(x - m) \Leftrightarrow F = \left[m - \frac{p}{2}; n \right];$$

je-li osa je rovnoběžná s osou y , pak

$$(x - m)^2 = -2p(y - n) \Leftrightarrow F = \left[m; n - \frac{p}{2} \right];$$

$$(x - m)^2 = 2p(y - n) \Leftrightarrow F = \left[m; n + \frac{p}{2} \right].$$

Jedná se o tzv. vrcholové rovnice paraboly. Speciálně pro vrchol v počátku přejdou tyto rovnice na tvary:

$$y^2 = 2px; \quad y^2 = -2px; \quad x^2 = 2py; \quad x^2 = -2py.$$

Roznásobením mocnin ve vrcholových rovnicích paraboly s vrcholem $V = [m, n]$ obdržíme obecnou rovnici paraboly, která je tvaru

$$y^2 + Ax + By + C = 0; \quad A \neq 0 \quad \text{pro osu rovnoběžnou s osou } x, \text{ resp.}$$

$$x^2 + Ay + Bx + C = 0; \quad A \neq 0 \quad \text{pro osu rovnoběžnou s osou } y.$$

5. Příklad: Zjistíme vrchol, ohnisko, parametr a polohu paraboly $y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$.

Řešení:

$$y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$$

$$y^2 + 6y = 4x - 1$$

$$y^2 + 6y + 9 = 4x - 1 + 9$$

$$(y + 3)^2 = 4(x + 2).$$

Vrchol paraboly tedy je $V = [m; n] = [-2; -3]$, osa paraboly je rovnoběžná s osou x , $p = 2$,

$$F = \left[m + \frac{p}{2}; n \right] = [-1; -3].$$

Neřešené úlohy:

- 1) Napište rovnici kružnice, která má střed v počátku a prochází bodem **a)** $A = [-3; 4]$
b) $B = [-12; 5]$.
- 2) Napište rovnici kružnice, která má střed $S = [2; 3]$ a prochází bodem $M = [-1; 7]$.
- 3) Zjistěte, zda dané rovnice jsou rovnicemi kružnice, pokud ano, najděte středy a poloměry
a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ **b)** $3x^2 + 3y^2 + 8x - 6 = 0$ **c)** $x^2 + y^2 + x = 0$ **d)** $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$
- 4) Napište rovnici kružnice, která prochází body $A = [5; 1]$; $B = [0; 6]$; $C = [4; -2]$.
- 5) Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu v ose x a vedlejší osu v ose y , je-li dáno
a) $a = 5; b = 3$ **b)** $a = 13; e = 12$ **c)** $a + b = 9; e = 3$.
- 6) Zjistěte poloosy elipsy **a)** $16x^2 + 25y^2 = 400$ **b)** $4x^2 + 9y^2 = 36$ **c)** $x^2 + 4y^2 = 16$.
- 7) Zjistěte, zda jde o elipsu, pokud ano, udejte střed, polohu os a poloosy:
a) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$ **b)** $4x^2 + 25y^2 - 24x + 100y + 139 = 0$
c) $7x^2 + 5y^2 - 28x + 38 = 0$ **d)** $9x^2 + y^2 + 9x - 4y = 0$ **e)** $9x^2 + 4y^2 - 36x + 72y + 360 = 0$.
- 8) Najděte rovnici hyperboly o středu $S = [0; 0]$, je-li
a) $a = 8; b = 4$ **b)** $a = 4; e = 5$ **c)** $b = 3; e = 5$.
- 9) Zjistěte, zda jde o hyperbolu, pokud ano, udejte střed, polohu os a poloosy:
a) $-9x^2 + 16y^2 + 90x + 64y - 305 = 0$ **b)** $x^2 - y^2 + 6x - 8y - 107 = 0$
c) $9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y + 32 = 0$.
- 10) Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a ohnisko v bodě
a) $F = \left[\frac{3}{2}; 0\right]$ **b)** $F = [-3; 0]$ **c)** $F = [0; -1]$.
- 11) Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a prochází bodem $A = [2; 6]$.
- 12) Určete vrchol a ohnisko paraboly **a)** $y^2 - 7x - 6y - 19 = 0$ **b)** $x^2 - 8x - 3y + 10 = 0$
c) $x^2 - 10x - 9y + 61 = 0$.

Výsledky:

- 1) **a)** $x^2 + y^2 = 25$ **b)** $x^2 + y^2 = 169$ **2)** $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$ **3) a)** $S = [1; -2]; r = 3$
b) $S = \left[-\frac{4}{3}; 0\right]; r = \frac{1}{3}\sqrt{34}$ **c)** $S = \left[-\frac{1}{2}; 0\right]; r = \frac{1}{2}$ **d)** není rovnicí kružnice
- 4) $x^2 + y^2 - 2y - 24 = 0$ **5) a)** $9x^2 + 25y^2 = 225$ **b)** $25x^2 + 169y^2 = 4225$ **c)** $16x^2 + 25y^2 = 400$
- 6) **a)** $a = 5; b = 4$ **b)** $a = 3; b = 2$ **c)** $a = 4; b = 2$ **7) a)** $S = [3; 2]; a = 5; b = 6$; hlavní osa rovnoběžná s x **b)** není elipsa **c)** není elipsa **d)** $S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right]; a = \frac{5}{2}; b = \frac{5}{6}$; hlavní osa rovnoběžná s y **e)** pouze bod $[2; -9]$.
- 8) **a)** $x^2 - 4y^2 = 64$ **b)** $9x^2 - 16y^2 = 144$ **c)** $9x^2 - 16y^2 = 144$ **9) a)** $S = [5; -2]; a = 3; b = 4$; hlavní osa rovnoběžná s y **b)** $S = [-3; -4]; a = b = 10$; hlavní osa rovnoběžná s x **c)** není hyperbola **10) a)** $y^2 = 6x$ **b)** $y^2 = -12x$ **c)** $x^2 = -4y$ **11) a)** $x^2 = \frac{2}{3}y$; $y^2 = 18x$ **12) a)** $V = [-4; 3]; F = \left[-\frac{4}{9}; 3\right]$
b) $V = [4; -2]; F = \left[4; -\frac{5}{4}\right]$ **c)** $V = [5; 4]; F = \left[5; \frac{25}{4}\right]$.